

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Tirsdag 8. mai 2018, kl. 09.00-14.00.

Tillatte hjelpemidler: Lærebok (Adams & Essex: *Calculus – A Complete Course*) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider og består av 8 oppgaver, med til sammen 14 deloppgaver. Alle deloppgavene teller likt ved sensurering. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Skriv det komplekse tallet $\left(\frac{2}{1-i}\right)^3$ på formen $a + ib$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

Oppgave 2

Bestem grenseverdien $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x + 1})$.

Oppgave 3

Bestem om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos(2x)-1)}{x^2}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Oppgave 4

- (a) Beregn Taylorpolynomet av orden 3, $P_3(x)$, om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = x \cos x, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Vis at den reelle funksjonen $g(x) = 4 \sin x + x \cos x$ er strengt voksende på intervallet $[0, \pi/4]$.
- (c) For $0 < x < \frac{\pi}{4}$, finn konstanter G og H slik at

$$P_3(x) + Gx^4 < f(x) < P_3(x) + Hx^4.$$

Hint: Du kan få bruk for 4(b)

Oppgave 5

Uten å løse for $y(x)$, finn verdien av $y''(0)$ i initialverdi problemet

$$(x + 2)y' + y = 1, \quad x > 0, \quad y(0) = 2.$$

Oppgave 6

Grafene til to funksjoner $y = f(x)$ er vist i Figur 1 under. For hver av dem, skisser kvalitativt korrekte grafer av den førstederiverte $f'(x)$ og den dobbeltderiverte $f''(x)$ utfra grafen til $f(x)$.

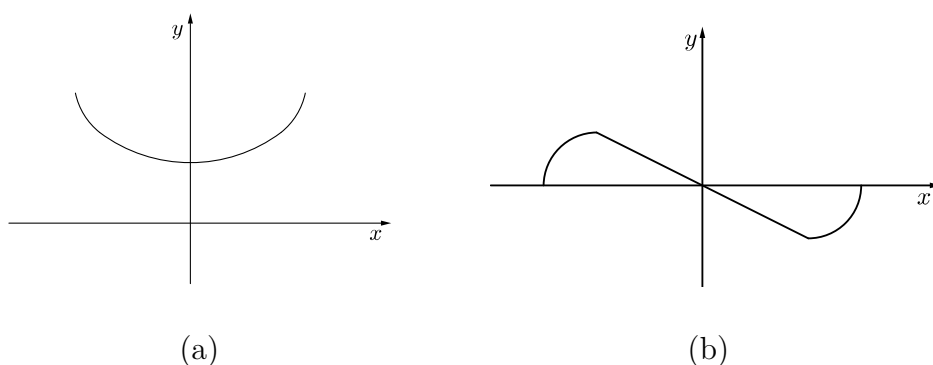


Figure 1: The graph of $y = f(x)$.

Oppgave 7

Regn ut følgende ubestemte integraler

(a) $\int x^3 \sin(x^2) dx$

(b) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

Oppgave 8

Den (reelle) funksjonen f (definert på et intervall) har egenskapen at alle normalene til grafen til f går gjennom punktet $(2, 1)$. (Normalen er linjen som står vinkelrett på tangenten til grafen til f i et punkt).

- (a) Vis at $y = f(x)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$y' = \frac{2 - x}{y - 1}.$$

Hint: Bruk den gitte informasjonen til å beregne stigningen til grafen til funksjonen i et vilkårlig punkt (x, y) .

- (b) Finn alle løsningene til differensialligningen i (a). Behold svaret i implisitt form. (Du kan løse dette problemet uten å ha løst (a)).
- (c) Hva slags type kurver er beskrevet av de implisitte løsningene i (b)? (Spesifiser hvilke verdier av integrasjonskonstanten som gir slike kurver.)

-----LYKKE TIL-----

Vincent T. Teyekpiti