BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I

Fredag 13. desember 2019, kl. 09–14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok ("Calculus - a complete course" av R. A. Adams og C. Essex, 9., 8. eller 7. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1–7) og er sammensatt av 17 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (f.eks. teller oppgave 1a like mye som oppgave 7).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

English translation follows on page 4.

OPPGAVE 1

(a) Skriv de komplekse tallene nedenfor på normalform (på formen $a + ib$):

$$(i) \quad \frac{2+3i}{1+4i} \qquad \text{(ii)} \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9.$$

(b) Finn alle løsningene til ligningen $z^3 = -1$ og skriv dem på normalform.

(c) Faktoriser $z^3 + 1$ i lineære faktorer over $\mathbb{C}$ og i lineære og kvadratiske faktorer over $\mathbb{R}$.

OPPGAVE 2

En kiselalge (*Tacphoria arlyc Ketil, 2019*) blomstrer i takt med tilgangen på næring, slik at den totale massen $y(t)$ (i megatonn) kiselalger i Beringhavet ved tid t (i måneder etter nyttår) tilfredsstiller differensialligningen

$$y'(t) = k \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \cdot y(t),$$

der k er en konstant. Gitt at $y(0) = 100$ og $y(6) = 400$, finn $y(t)$.

OPPGAVE 3

(a) Bruk den *formelle definisjonen av grenseverdi* ("ϵ-δ-definisjonen") til å vise at

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3,$$

(b) La f og g være deriverbare funksjoner og a et reelt tall slik at

$$f(a)=g(a)=0, \quad g'(a)\neq 0.$$

Begrunn at

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Du får *bare* bruke definisjonen av den deriverte og grensesetningene, ikke f.eks. l'Hôpital's regel.

(c) Bruk konklusjonen i deloppgave (b) til å regne ut

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}.$$

OPPGAVE 4

Regn ut integralene ved grunnleggende integrasjonsteknikker (ikke ved å slå opp i permen i læreboken).

(a)

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-15}.$$

(b)

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$

(Hint: bruk delvis integrasjon).

(c)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

OPPGAVE 5

Betrakt funksjonen $f\colon [0,\infty)\to(-\infty,1]$ gitt ved $f(x)=1-2x\tan^{-1}x$.

(a) Vis at f er invertibel.

(b) Vis at $f(x)=0$ har en entydig løsning $x=b$ der $b\in(0,1)$.

(c) Finn en tilnærming x_1 av nullpunktet b ved å bruke Newtons metode med én iterasjon og startverdi $x_0=1$.

(d) Bruk krumningen og om grafen $y=f(x)$ vokser eller avtar til å forklare hvorfor Newtons metode gir en følge $1=x_0,x_1,x_2,\dots$ av tall som avtar mot b: med andre ord, vis ulikhetene

$$x_0>x_1>\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots>b.$$

OPPGAVE 6

(a) Bruk trapesmetoden med fire delintervall for å finne en tilnærming til integralet

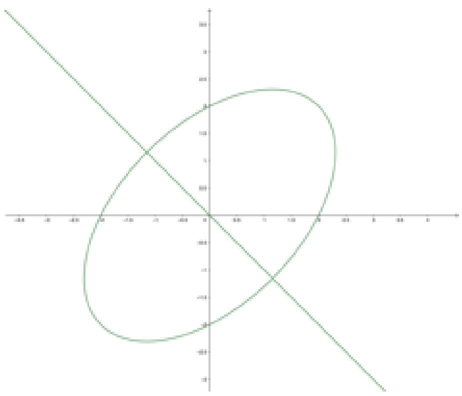
$$\int_0^1 (1+t^4)^{3/2}\,dt.$$

(b) Hvor mange ledd må en bruke i trapesmetoden for å tilnærme $\int_0^1 (1+t^4)^{3/2}\,dt$ med en presisjon bedre eller lik $0,04$?

OPPGAVE 7

Et veinett er gitt ved ligningen

$$x^3 + y^3 = 4x + 4y.$$



Du kjører på denne veien: ved tid t er du i punktet $(x(t), y(t))$, der $x(t)$ og $y(t)$ er deriverbare funksjoner som tilfredstiller likningen $x(t)^3 + y(t)^3 = 4x(t) + 4y(t)$.

Om $(x(0), y(0)) = (0, 2)$ og $y'(0) = 6$, hva er $x'(0)$?

LYKKE TIL!

Bjørn Ian Dundas, Per Manne

English translation of Exam in MAT111 – Fall 2019

Warning: The following translation for the examination in MAT111 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: Textbook ("Calculus - a complete course" by R. A. Adams and C. Essex, 9th, 8th or 7th edition, or earlier editions by R. A. Adams) and calculator, according to the rules of the faculty.

The problem set consists of 3 pages (with problems 1–7) and consists of 17 subproblems that all count equally (for instance: problem 1a counts as much as problem 7).

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Credits will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

PROBLEM 1

(a) Write the complex numbers below in normal form (in the form $a + ib$):

$$(i) \quad \frac{2+3i}{1+4i} \qquad \text{(ii)} \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9.$$

(b) Find all solutions to the equation $z^3 = -1$ and write them in normal form.

(c) Factor $z^3 + 1$ in linear factors over $\mathbb{C}$ and in linear and quadratic factors over $\mathbb{R}$.

PROBLEM 2

A diatom (*Tacphoria arlyc Ketil, 2019*) blooms according to the amount of nutrients, so that the total mass $y(t)$ (in megatons) diatoms in the Bering Sea at time t (in months after New Year) satisfies the differential equation

$$y'(t) = k \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \cdot y(t),$$

where k is a constant. Given that $y(0) = 100$ and $y(6) = 400$, find $y(t)$.

PROBLEM 3

(a) Use the *formal definition of the limit* (the "ϵ-δ-definition") to show that

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3,$$

(b) Let f and g be differentiable functions and let a be a real number such that

$$f(a)=g(a)=0, \quad g'(a)\neq 0.$$

Show that

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

You can *only* use the definition of the derivative and the Rules for Calculating Limits, not e.g., l'Hôpital's rule.

(c) Use the conclusion of problem (b) to calculate

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}.$$

PROBLEM 4

Calculate the integrals by basic integration techniques (not by looking into the cover of the textbook).

(a)

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-15}.$$

(b)

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$

(Hint: use partial integration).

(c)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

PROBLEM 5

Consider the function $f\colon [0,\infty)\to(-\infty,1]$ given by $f(x)=1-2x\tan^{-1}x$.

(a) Show that f is invertible.

(b) Show that $f(x)=0$ has a unique solution $x=b$ where $b\in(0,1)$.

(c) Find an approximation x_1 of the solution b by using Newton's method with one iteration and initial value $x_0=1$.

(d) Use the curvature and whether the graph $y=f(x)$ increases or decreases to explain why Newton's method produces a sequence $1=x_0, x_1, x_2, \ldots$ of numbers decreasing towards b: in other words, show the inequalities

$$x_0>x_1>\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots>b.$$

PROBLEM 6

(a) Use the trapezoid rule with four subintervals to find an approximation to the integral

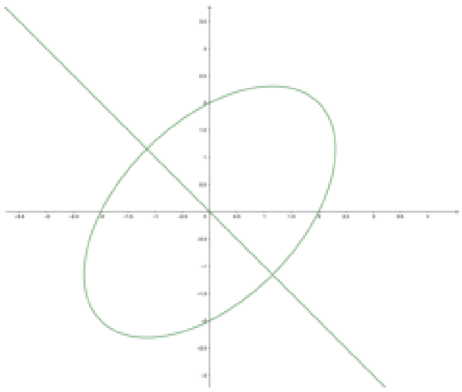
$$\int_0^1 (1+t^4)^{3/2}\,dt.$$

(b) How many subintervals do you need in the trapezoidal rule to approximate the integral $\int_0^1 (1+t^4)^{3/2}\,dt$ with a precision better than or equal to 0.04?

PROBLEM 7

A road system satisfies the equation

$$x^3+y^3=4x+4y.$$



You are driving on this road: at time t you are at the point $(x(t),y(t))$, where $x(t)$ and $y(t)$ are differentiable functions satisfying the equation $x(t)^3+y(t)^3=4x(t)+4y(t)$.

If $(x(0),y(0))=(0,2)$ and $y'(0)=6$, what is $x'(0)$?

GOOD LUCK!

Bjørn Ian Dundas, Per Manne