

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 20. mai 2019, kl. 09–14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok (“Calculus - a complete course” av R. A. Adams og C. Essex, 9., 8. eller 7. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

English translation follows on page 3.

OPPGAVE 1

Finn alle tredjeterter av det komplekse tallet

$$z = \frac{2 + 6i}{1 - 2i}.$$

OPPGAVE 2

Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x} - 1$$

med definisjonsområde $D(f) = (0, +\infty)$. Bruk den formelle grensedefinisjonen for å vise at funksjonen f har en grense når x går mot uendelig.

OPPGAVE 3

Vis at ulikhetene

$$x \geq \arctan x \geq \frac{x}{1 + \frac{2}{\pi}x}$$

holder for alle $x \geq 0$. Skisser grafene til de tre funksjonene.

Hint: Minimer funksjonene $\varphi(x) = x - \arctan x$ og $\psi(x) = \arctan x - \frac{x}{1 + \frac{2}{\pi}x}$ på intervallet $[0, +\infty)$.

fortsetter... ↔

OPPGAVE 4

Finn grensen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + 2 \sin(x) - \cos(2x)}{x^2}.$$

OPPGAVE 5

Betrakt funksjonen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

med definisjonsområde $D(f) = \mathbb{R}$. Finn ekstremverdier til funksjonen, og avgjør hvor $f(x)$ er konveks og konkav. Finn grensene ved $+\infty$ og $-\infty$. Har funksjonen noen asymptoter? Skisser grafen til $f(x)$.

OPPGAVE 6

Beregn integralet

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \cos^{2019}(x) dx.$$

OPPGAVE 7

Beregn det uegentlige integralet

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

OPPGAVE 8

La Γ være grafen til funksjonen $f(x) = \sin(2x)$ med definisjonsområde $D(f) = [0, \pi]$. Finn volumet av omdreingslegemet som blir generert ved å rotere kurven Γ om x -aksen.

Hint: Formelen $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ kan være nyttig.

OPPGAVE 9

Finn alle løsningene av differensialligningen

$$y' \sin x - y \cos x = 0.$$

Finn den løsningen som tilfredsstiller initialverdi problemet $y(\pi/2) = -1$.

LYKKE TIL!

Evgueni Dinvoy

Per Erik Manne

English translation of Exam in MAT111 – Spring 2019

Warning: The following translation for the examination in MAT111 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: Textbook (“Calculus - a complete course” by R. A. Adams and C. Essex, 9th, 8th or 7th edition, or earlier editions by R. A. Adams) and calculator, according to the rules of the faculty.

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Credits will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

PROBLEM 1

Find all cubic roots (3-th order roots) of the complex number

$$z = \frac{2 + 6i}{1 - 2i}.$$

PROBLEM 2

Consider the function

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x} - 1$$

with domain of definition $D(f) = (0, +\infty)$. Using the formal limit definition, prove that the function f has a limit as x approaches $+\infty$.

PROBLEM 3

Prove that the inequalities

$$x \geq \arctan x \geq \frac{x}{1 + \frac{2}{\pi}x}$$

hold for any $x \geq 0$. Draw the graphs of the three functions.

Hint: Minimize the functions $\varphi(x) = x - \arctan x$ and $\psi(x) = \arctan x - \frac{x}{1+2x/\pi}$ on the interval $[0, +\infty)$.

PROBLEM 4

Find the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} + 2 \sin(x) - \cos(2x)}{x^2}.$$

PROBLEM 5

Consider the function

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

with the domain $D(f) = \mathbb{R}$. Find extreme values for this function, and determine where $f(x)$ is convex or concave. Find the limits at $+\infty$ and $-\infty$. Does the function have any asymptotes? Sketch the graph of $f(x)$.

PROBLEM 6

Calculate the integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \cos^{2019}(x) dx.$$

PROBLEM 7

Calculate the improper integral

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

PROBLEM 8

Let Γ be the graph of the function $f(x) = \sin(2x)$ with domain of definition $D(f) = [0, \pi]$. Find the volume of the solid of revolution generated by rotating the curve Γ about the x -axis.

Hint: The formula $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ might be of help.

PROBLEM 9

Find all solutions of the differential equation

$$y' \sin x - y \cos x = 0.$$

Then find the solution that satisfies the initial-value problem $y(\pi/2) = -1$.

GOOD LUCK!

Evgueni Dinvay

Per Erik Manne