1(a) Egenerklæring

Egenerklæring

Jeg erklærer på ære og samvittighet at jeg under opplastnings- og eksamenstiden ikke har noen mobilkontakt, samtale eller nettkontakt med andre enn emneansvarlig vedrørende eksamensoppgavene.

Jeg erklærer herved at besvarelsen som jeg leverer er mitt eget arbeid og

- ikke inneholder andres arbeide uten at dette er oppgitt.
- ikke inneholder eget tidligere arbeide uten at dette er oppgitt.
- ikke har vært brukt i en annen eksamen eller vært levert eller publisert ved en annen utdanningsinstitusjon innenlands eller utenlands.
- at litteraturlisten/referanselisten inneholder all litteratur og alle kilder jeg har brukt i besvarelsen og at alle referansene viser til denne listen.

Jeg er kjent med at brudd på disse bestemmelsene er å betrakte som fusk, som fører til annullering av eksamen og opptil ett års utestengelse fra studier.
Dersom du er usikker på om du kan stille deg bak erklæringen, se retningslinjer for bruk av kilder i skriftlige arbeider ved Universitetet i Bergen og eventuelt ta kontakt med din veileder/emneansvarlig.
Alle eksamensbesvarelser ved UiB blir sendt til manuell og elektronisk plagiatkontroll.
Merk: Det er ikke anledning til å levere besvarelser som ikke oppfyller kravene i egenerklæringen.

○ Jeg bekrefter at jeg har lest egenerklæringen, godkjenner denne og at besvarelsen er mitt eget arbeid

---

Maks poeng: 0

1(b) Hjelpemidler og kontaktinformasjon

Alle hjelpemidler tillatt unntatt samarbeid med andre.

Ved tekniske problemer med Inspera skriv en e-post til studieveileder@math.uib.no. Ha kandidatnummer og studentnummer klar når du tar kontakt.
Dersom det oppstår et behov for å gi fellesbeskjeder til alle studenter når eksamen pågår, vil det primært brukes kunngjøring i MittUiB.

Eksamenstid er kl. 09:00-14:00.
Ekstratid for opplastning av filer: 30 min.

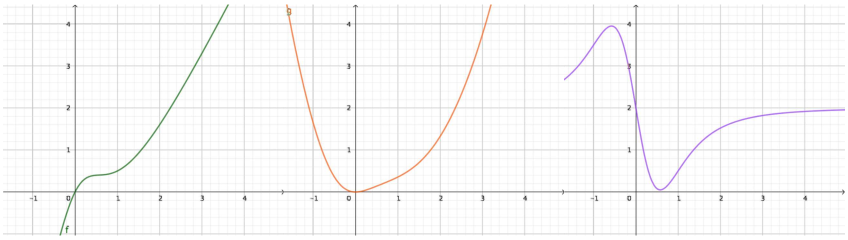
Ved mistanke om alvorlige feil eller uklarheter i eksamenssettet kontakt Dundas på
Telefon: 976 22 576
Epost: dundas@math.uib.no

○ Jeg har lest og forstått.

Maks poeng: 0

2(a) Gjenkjenne derivert og antiderivert

Under ser du tre grafer. Lengst til venstre (grønn) er grafen $y = f(x)$, så (orange) grafen $y = g(x)$ og til slutt (lilla) grafen $y = h(x)$



En av dei tre funksjonene har egenskapen at de to andre er henholdsvis den deriverte og en antiderivert. Hvilken funksjon er det?

Velg ett alternativ:

- g
- h
- f

Maks poeng: 10

2(b) Deriverbar?

Hva er definisjonen til den deriverte til en funksjon i et punkt?
Finnes det reelle tall a og b slik at funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\tan^{-1}(t)+2t^2}{t} & t > 0 \\ a & t = 0 \\ e^{b\tan^{-1}(t)} & t < 0 \end{cases}$$

blir deriverbar? Hvis så, finn dem.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

3

Komplekse tall

La $z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi\, i}{4}}$. Skriv det komplekse tallet $1/z + z^9$ på normalform (på formen $a + i\, b$).

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

4(a)

Kontinuitet og epsilon-delta

Bruk definisjonen av kontinuitet og grense ("$\epsilon - \delta$" definisjonen) til å vise at funksjonen $f\colon (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ gitt ved $f(x) = \frac{9}{x}$ er kontinuerlig i $x = 3$.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

4(b) Invers funksjon

Hva vil det si at en funksjon har en invers? Begrunn at funksjonen $f\colon (-\infty,0)\cup(0,\infty)\to(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ gitt ved $f(x)=\frac{9}{x}$ har en invers.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

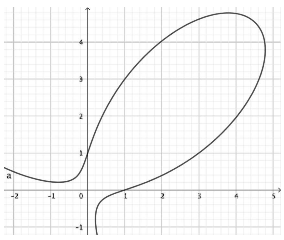
Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

5 Bilbane

En bil kjører på en vei og posisjonen ved tid t (i timer) er $(x(t), y(t))$ der x og y er to deriverbare funksjoner som tilfredsstiller ligningen

$x(t)^3+y(t)^3=9x(t)y(t)+1$



(alle avstander i kilometer).

I origo står en fartsmåler. Ved tid $t=0$ er bilen i punktet $(0,1)$ og avstanden mellom bilen og fartsmåleren øker med 50 kilometer i timen. Regn ut $x'(0)$.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

6 Nullpunkt

a) Begrunn at funksjonen gitt ved $f(x) = x^4 + x - 1$ har nøyaktig ett nullpunkt b i intervallet $(-2, -1)$.
Hva er ligningen til tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet $(-2, f(-2))$? Finn skjæringen mellom x-aksen og tangenten.
Finn en tilnærming til nullpunktet b ved Newton-Raphsons metode med en iterasjon og startverdi $x_0 = -2$.

b) Forklar kort hvorfor Newton-Raphsons metode (for funksjonen gitt ved $f(x) = x^4 + x - 1$ som har nøyaktig ett nullpunkt b i intervallet $(-2, -1)$) med startverdi $x_0 = -2$ vil gi en følge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ med $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < b$.
I argumentet skal både den første og andre derivert inngå, og det skal være med en klar illustrasjon som viser hvordan du tenker.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 20

7 Taylor for integral

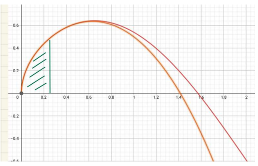
Vi utforsker hvordan Taylor-polynom kan brukes til å beregne integraler som vi ellers ikke vet hvordan vi skal håndtere. Her ser vi på

$\int \sqrt{x} \cdot \cos x \, dx,$

erstatter cos x med polynomet $1 - \frac{x^2}{2}$ og gir et estimat på hvor stor forskjellen mellom $\int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \cos x \, dx$ og

$\int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \, dx = \int_0^{1/4} \left(x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{2}\right) \, dx = \frac{1}{12} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} = \frac{221}{2688} \approx 0.082217269$

er.



a) Skriv opp Taylors formel om 0 av grad tre, $f(x) = P_3(x) + E_3(x)$, for $f(x) = \cos x$.

b) Vis at om $x \in (0, 1/4]$ så er $\frac{\cos \frac{1}{4}}{24} x^4 < E_3(x) < \frac{1}{24} x^4$ og at

$0.0000035 < \int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \cos x \, dx - \frac{221}{2688} < \frac{1}{270336} < 0.0000037.$

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 20

8
Smitte

Et virus smitter ved kontakt og er du først smittet vil du forbli smittebærer i ubegrenset tid. I en isolert befolkning med P personer (ingen dør eller fødes) er smitteraten ved tid t (i måneder efter 1/1 2020) proporsjonal med produktet av

1. antallet $y(t)$ som *er* smittet,
2. antallet som *ikke er* smittet
3. e^{at} der a er et **negativt** tall som avhenger av smittebegrensende tiltak.

En tiendedel av befolkningen er smittet 1/1-2020.

(a) Still opp differensialligningen som $y(t)$ må tilfredsstille og løs den (kall proporsjonalitetskonstanten k og husk å forklare hvert steg i løsningen nøye. Er der f.eks. en konstant løsning?).

(b) Finn en sammenheng mellom $L = \lim_{t\to\infty} y(t)$, a, P og k. Hva kan du si om L når $|a|$ er svært liten? Hva kan du si om L når $|a|$ er svært stor?

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 20

9
Integrerbar

La $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være en voksende funksjon, la $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1\}$ være en partisjon og la $\Delta_{\max} x = \max_{k=1,...,n}\{x_k - x_{k-1}\}$ (kalt "normen" til $\mathcal{P}$ i kapittel 5.3 i boken).
Forklar kort hvorfor forskjellen mellom øvre og nedre Riemannsum er mindre eller lik
$(f(1) - f(0))\Delta_{\max} x$
(dette er første steg på vei til å vise at funksjonen er integrerbar).
Gode illustrasjoner med kort og klar tekst vil gi god uttelling.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

10 Fritekst og takk for i år!

Var det noe som du synes du bør utdype nærmere (f.eks. hvordan du tenkte da du svarte på envalgsoppgaven) eller som du vil kommentere om oppgavene på settet. Skriv det her!

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Håper du har hatt et godt og lærerikt semester, selv om jo alt ble litt anderledes enn vi hadde planlagt.

Lykke til videre og håper du får masse bruk for det du har lært i MAT111. Prøv å holde det ved like. Husk at ingen tror de har bruk for det de ikke kan. Vi trenger folk med analytiske ferdigheter og kunnskaper som støtter opp om disse i nesten alle deler av samfunnet.

Hilsen Bjorn

Maks poeng: 0