NYNORSK

**UNIVERSITETET I BERGEN**
Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

# Eksamen i emnet M101 - Grunnkurs i matematikk II

Mandag 22. mai 2000, kl. 09-14.

Tillatne hjelpemiddel: kalkulator.

## Oppgåve 1

a) La $D = \{(x, y) : \quad x^2 + 4y^2 \le 24\}$. Finn største og minste verdi til $g(x, y) = x^2y^2 - x^2$ over $D$

b) Finn største og minste verdi til $f(x, y, z) = x + y + z$ dersom

$$(*) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

der $a > 0$ er ein konstant.

c) Vis at

$$(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

gjeld for alle reelle tal $x, y, z$.

## Oppgåve 2

a) La $T(x, y) = 10(x^2 - xy + 2y^2)$. I kva for retning ut fra punktet $P_0 : (2, 4)$ har $T$ størst umiddelbar auking. Finn dessuten ein vektor $\overline{v}$ slik at den retningsderiverte for $T$ i $P_0$ i retninga gitt ved $\overline{v}$, er lik null.

b) La $C$ vere skjæringskurva mellom flatene

$$x^2 + 2y^2 - z = 0$$

og

$$12 - 3x^2 - 2y^2 - z = 0$$

Vis at projeksjonen av $C$ ned i $xy-$ planet blir ein sirkel.

c) La $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ vere eit vilkårleg punkt på $C$. Grunngi at vektoren $\overline{v} = (-y_0, x_0, 2x_0y_0)$ tangerer $C$ i $P_0$. Finn dessuten punkta på $C$ som ligg høgast over $xy-$ planet.

## Oppgåve 3

a) Finn konvergensintervalet til rekkja

$$\sum_0^\infty \frac{x^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}}$$

b) La $f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}}$ Finn eit endeleg uttrykk for $f(x)$.

c) Vis at $\ln \frac{3}{2} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$.

## Oppgåve 4

Ein kurve er gitt i polarkoordinater ved

$$r(\theta) = \sqrt{3} + 2\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \frac{5}{6}\pi$$

a) Lag ei grov skisse av kurva.

b) Finn arealet avgrensa av kurva og $x-$ aksen.

## Oppgåve 5

a) Gitt det itererte integralet

$$\int_0^1 \left[ \int_{\tan^{-1}(y)}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx \right] dy$$

skisser integrasjonsområdet i $xy-$ planet og rekn ut integralet ved å bytte om på integrasjonsrekkjefølgja.

b) Finn volumet av punktmengda som ligg over $xy-$ planet, innanfor sylinderen $x^2 + y^2 = 4$ og innanfor ellipsoiden $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$.

## Oppgåve 6

a) Gi definisjonen av uniform kontinuitet.

b) La $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , $x > 0$. Grunngi at $f$ er uniformt kontinuerleg på $[a, b]$ når $0 < a < b \leq 1$.

c) Avgjer om $f$ er uniformt kontinuerleg på $(0, 1]$ og på $[1, \infty)$.

Arne Stray

Per Manne