Løsningsforslag til eksamen i M101 høsten 2002

Oppgave 1

a) Et stasjonært punkt er et punkt (a, b) hvor $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. Da må

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(1 - \frac{1}{2}x)e^{-(\frac{x+y}{2})} = 0$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy(2 - \frac{1}{2}y)e^{-(\frac{x+y}{2})} = 0.$$

Siden eksponentialfunkjsonen alltid er ulik null ser vi at $\frac{\partial f}{\partial x}$ er lik null hvis og bare hvis $y = 0$ eller $x = 2$. Likedan ser vi at $\frac{\partial f}{\partial y}$ er lik null hvis og bare hvis $x = 0$ eller $y = 0$ eller $y = 4$. Dette gir

$$\nabla f(a, b) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in \{(2, 4), (c, 0) \text{ hvor } c \text{ er et vilkårlig reelt tall}\}$$

b) f har sin største og minste verdi enten i et stasjonært punkt, i et singulært punkt eller i et punkt på randen. Et singulært punkt er et punkt hvor $\nabla f(a, b)$ ikke eksisterer. Ved utregningene i deloppgave a) ser vi at f har ingen singulære punkter. Ved deloppgave a) ser vi også at f ikke har noen stasjonære punkter i området bortsett fra på randen. Derfor må f har sin største og minste verdi på randen.

Vi har tre tilfeller å sjekke.

i) $x = 0$. Da blir $f(x, y) = f(0, y)$ konstant lik null.

ii) $y = 0$. Da blir $f(x, y) = f(x, 0)$ konstant lik null.

iii) $x + y = 4$ med $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Da får vi

$$f(x, y) = f(x, 4 - x) = x(4 - x)^2 e^{-2} = F(x)$$

$F(x)$ har sin største og minste verdi med $0 \leq x \leq 4$ når $x = 0$, $x = 4$ eller $F'(x) = 0$. Vi har

$$F'(x) = (4 - x)((4 - 3x)e^{-2}$$

som er lik null hvis og bare hvis $x = 4$ eller $x = 4/3$. Vi har $F(0) = F(4) = 0$ og $F(4/3) = (256/27)e^{-2}$.

Oppsumerer vi så har vi at den minste verdien til f i området er 0 og den største verdien til f i området er $(256/27)e^{-2}$.

Oppgave 2

a) Vi har

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x$$

og

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -2y.$$

Gradienten til T i et vilkårlig punkt (x, y) blir da

$$\nabla T(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$

I punktet $(-2, 1)$ er gradienten

$$\nabla T(-2, 1) = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}.$$

Retningen hvor T har størst umiddelbar økning fra punktet $(-2,1)$ er rett og slett bare retningen til gradient vektoren, altså

$$\frac{\nabla T(-2,1)}{|\nabla T(-2,1)|} = \frac{-4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

Dette siden gradientvektoren til T i et punkt gir den retningen som T har størst umiddelbar økning.

b) Kurven C vil tangere ∇T i alle punkt på C. Hvis vektoren $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ er parallell med ∇T så vil komponentene til disse vektorene være proporsjonale. Altså (dersom x og y er ulik null, hvilket de er i nærheten av $(-2,1)$)

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-2y}.$$

Integrerer vi begge sider av likningen får vi $\ln y = -\ln x + \ln c$, eller $y = c/x$. Siden kurven C går gjennom $(x,y) = (-2,1)$ må vi ha $1 = c/(-2)$, d.v.s. $c = -2$. Partikkelen vil derfor følge kurven C gitt ved likningen $y = -2/x$ for $-2 \le x < 0$.

Oppgave 3

a) For $n = 1$ sier ulikheten at

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

hvilket er opplagt.

Anta så at ulikheten gjelder for $n = n_0$. Vi vi vise at den da også gjelder for $n = n_0 + 1$. Skriver vi opp venstresiden for $n = n_0 + 1$ og bruker at ulikheten gjelder for $n = n_0$ får vi

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n_0 - 1) \cdot (2n_0 + 1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n_0) \cdot (2n_0 + 2)} < \frac{1}{\sqrt{2n_0 + 1}} \frac{2n_0 + 1}{2n_0 + 2} = \frac{\sqrt{2n_0 + 1}}{2n_0 + 2} < \frac{1}{\sqrt{2n_0 + 3}}$$

Den siste ulikheten følger av følgende ulikhet

$$(\sqrt{2n_0 + 1} \cdot \sqrt{2n_0 + 3})^2 = 4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4 = (2n + 2)^2.$$

Ulikheten i oppgaven gjelder da for $n = n_0 + 1$. Ved induksjon gjelder den for alle n.

b) Dersom $x = 1$ blir rekken den alternerende rekken

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Siden

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n + 1}{2n + 2} < 1$$

og

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$$

vil den alternerende rekken konvergere.

Når $x \to -1$ vil

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} \to \infty$$

Da vil også rekken gå mot uendelig, slik at rekken konvergerer ikke for $x = -1$.

c) Vi har

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Maclaurinrekken til $g'(x)$ får vi da ved å sette inn x^2 i rekken i deloppgave b). Altså

$$g'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n}.$$

Dersom Maclaurinrekken til en vilkårlig $F(x)$ integreres ledd for ledd er den nye rekken Maclaurinrekken til $G(x)$, hvor

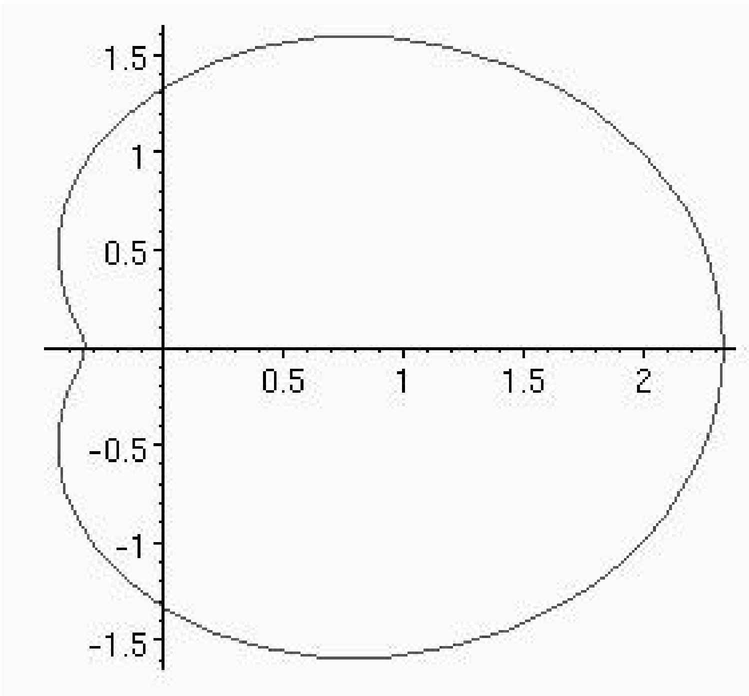
$$G(x) = \int_0^x F(t)dt.$$

Derfor kan vi integrere rekken til $g'(x)$ over ledd for ledd og få Maclaurinrekken til $g(x)$. Dette gir

$$g(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n+1}.$$

Oppgave 4

a)



Vi har

$$y = r(\theta)\sin\theta \text{ og } x = r(\theta)\cos\theta$$

I en vertikal tangent er $dx/d\theta = 0$. Dette gir

$$0 = \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\left(\frac{4}{3} + 2\cos\theta\right)$$

og

$$\theta \in \{0, \cos^{-1}(-2/3), -\cos^{-1}(-2/3)\}$$

Så K har vertikal tangent i tre punkter.

I en horisontal tangent er $dy/d\theta = 0$. Dette gir

$$0 = \frac{dy}{d\theta} = \frac{4}{3}\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1$$

og

$$\cos\theta \in \{\frac{-2+\sqrt{13}}{3}, \frac{-2-\sqrt{13}}{3}\}$$

b)

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(\theta))^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{9} + \frac{4}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}cos^2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{9} + \frac{4}{3}\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{41}{36}\theta + \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta|_0^{2\pi} \\
&= \frac{41\pi}{18}
\end{aligned}$$

Oppgave 5

a) Vi bytter til polare koordinater. Området D er da området gitt ved $0 \leq r \leq 1$ og $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Integralet blir

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy &= \iint_D \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta + \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^2 \sin(-\theta)}{1+r^2} drd\theta + \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta \\
&= -\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta + \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^2 \sin\theta}{1+r^2} drd\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

(Oppgaven kan også løses på tilsvarende måte uten å bruke polare koordinater ved å dele området D i to biter som gir motsatt bidrag til integralet. Men jeg synes at fremgangsmåten over er konseptuelt sett bedre.)

b)

$$\begin{aligned}
\iint_R (f(y)+g(x))dxdy &= \int_0^5 \left[\int_0^3 (f(y)+g(x))dx \right] dy \\
&= \int_0^5 \left[xf(y)|_{x=0}^3 + \int_0^3 g(x)dx \right] dy \\
&= \int_0^5 (3f(y)+\pi)dy \\
&= 3e + 5\pi
\end{aligned}$$

Oppgave 6

a) En funksjon $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ er *uniformt kontinuerlig* på et intervall I dersom det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

for alle $x, y \in I$.

b) Anta at f ikke er uniformt kontinuerlig. Da finnes det en $\epsilon > 0$ slik at det for en hver $\delta > 0$ finnes $x, y \in I$ slik at $|x-y| < \delta$ og $|f(x)-f(y)| > \epsilon$. Det finnes da spesielt en følge av tall $x_n \in I$ slik at det finnes en $y_n \in I$ for hver x_n slik at $|x_n - y_n| < 1/n$ og $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Da er

$$\left|\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right| > n\epsilon.$$

Enten er følgen $\{x_n\}$ ubegrenset eller det finnes en delfølge $\{x_{n'}\}$ av $\{x_n\}$ slik at delfølgen $\{x_{n'}\}$ konvergerer mot en $x \in \mathbb{R}$.

Dersom følgen $\{x_n\}$ ikke er oppad begrenset så kan heller ikke intervallet I være oppad begrenset og $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ blir ubegrenset. Dette strider mot betingelsene i oppgaven så dette tilfellet er umulig.

Tilfellet hvor følgen $\{x_n\}$ ikke er nedad begrenset behandles likedan.

Dersom følgen $\{x_n\}$ er begrenset, så kan vi finne en x som over. Da får vi

$$\lim_{n'\to\infty}\left|\frac{f(x_{n'}) - f(y_{n'})}{x_{n'} - y_{n'}}\right| = \infty$$

Dersom $x \in I$ betyr dette at f ikke er deriverbar i x hvilket strider mot betingelsene i oppgaven. Dersom $x \notin I$ betyr dette at f' ikke er begrenset på I hvilket også strider mot betingelsene i oppgaven.

Vi ser at vi i alle tilfellene får noe som strider mot betingelsene i oppgaven. Derfor kan ikke antagelsen vår være sann og dermed blir f uniformt kontinuerlig.

c) Et eksempel er $g = \sqrt{x}$ på intervallet $I = (0, 1)$. Da er g deriverbar på hele I med derivert

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Når $x \to 0$ ser vi at $g'(x) \to \infty$, så g' er ikke begrenset på I.

Å vise at g er uniformt kontinuerlig på I er litt værre. Til å vise dette bruker vi at

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$$

når $x \geq y > 0$. (Bevis for ulkheten: Kvadrerer vi begge sider av ulikheten og flytter over får vi ulikheten $-2\sqrt{xy} \leq -2y$. Ganger vi begge sider av denne ulikheten med $-2/\sqrt{y}$ får vi $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ som er sann siden $x \geq y > 0$. Dermed er også den opprinnelige ulikheten sann.) Vi ser nå at g oppfyller definisjonen for uniform kontinuitet ved å velge δ slik at $0 < \delta \leq \epsilon^2$ for alle $\epsilon > 0$.