LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I M101 VÅREN 2002

Oppgave 1

a) Et stasjonært punkt er et punkt (a,b) hvor $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$. Da må

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^3y^2e^{-(x^2+y^2)} = 2xy^2(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2ye^{-(x^2+y^2)} - 2x^2y^3e^{-(x^2+y^2)} = 2x^2y(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

Siden eksponentialfunksjonen alltid er ulik null ser vi at $\frac{\partial f}{\partial x}$ er lik null hvis og bare hvis $y = 0$ eller $x = 0$ eller $x = \pm 1$. Likedan ser vi at $\frac{\partial f}{\partial y}$ er lik null hvis og bare hvis $x = 0$ eller $y = 0$ eller $y = \pm 1$. Dette gir

$$\nabla f(a,b) = \mathbf{0} \iff$$
$$(a,b) \in \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1), (c,0), (0,c) \text{ hvor } c \text{ er et vilkårlig reelt tall}\}$$

b) f har sin største og minste verdi enten i et stasjonært punkt, i et singulært punkt eller i et punkt på randen. Et singulært punkt er et punkt hvor $\nabla f(a,b)$ ikke eksisterer. Ved utregningene i deloppgave a) ser vi at f har ingen singulære punkter.

Vi sjekker først verdien til f i de stasjonære punktene. Dersom $x = 0$ eller $y = 0$ blir $f(x,y) = 0$. Dersom x og y er lik ± 1 blir $f(x,y) = e^{-2}$.

Så sjekker vi verdien til f på randen av området D. På randen er $x^2 + y^2 = 4$ og vi har derfor

$$f(x,y) = f(x, \pm\sqrt{4-x^2}) = x^2(4-x^2)e^{-4} = F(x)$$

$F(x)$ er en funksjon på intervallet $I = [-2, 2]$. F har størst verdi når $x = \pm 2$ eller når $F'(x) = 0$. Vi har $F(\pm 2) = 0$ og

$$F'(x) = 2x(4-x^2)e^{-4} - 2x^3e^{-4} = 4x(2-x^2)e^{-4}$$

som er lik null hvis og bare hvis $x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{2}$. Siden $F(0) = 0$ og $F(\pm\sqrt{2}) = 4e^{-4}$ blir den største verdien til F lik $4e^{-4}$.

Siden $e^{-2} > 4e^{-4}$ blir da den største verdien til f over området D lik e^{-2}.

Oppgave 2

a) Den retningsderiverte til f i P_0 i retningen $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla f(3,3).$$

Vi har

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

Videre er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,3) = 3y - 3x^2|_{(x,y)=(3,3)} = -12$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,) = 3x - 3y^2|_{(x,y)=(3,3)} = -12$$

så den retningsderiverte blir

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})\right) \cdot (-12(\mathbf{i}+\mathbf{j})) = \frac{-24}{\sqrt{5}} + \frac{-12}{\sqrt{5}} = \frac{-36}{\sqrt{5}}$$

Den maksimale retningsderiverte til f i P_0 er

$$|\nabla f(3,3)| = |-12(\mathbf{i}+\mathbf{j})| = 12\sqrt{2}$$

Oppgave 3

a)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

b) Rekken har leddene

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!\cdot n}.$$

Da blir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n-2)!\cdot n}{(2n)!(n+1)} = \frac{n}{(2n)(2n-1)(n+1)}.$$

Vi ser at når $n \to \infty$ vil $|a_{n+1}/a_n| \to 0$. Derfor vil rekken konvergere for alle x ved resultat om konvergensradius.

c) Potensrekker kan deriveres ledd for ledd innenfor sitt konvergensområde. Vi har

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \cos\sqrt{x}$$

hvor den siste likheten holder når $x \geq 0$.

Dersom rekken til $f'(x)$ integreres ledd for ledd er den nye rekken potensrekken til

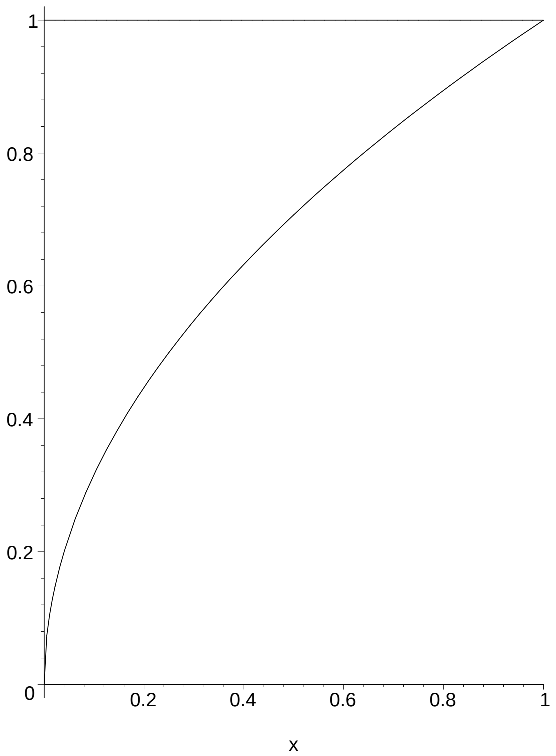
$$\begin{aligned}
\int_0^x f'(t)dt &= \int_0^x \cos\sqrt{t}dt \\
&= \int_0^{\sqrt{x}} 2u\cos u du \\
&= (2u\sin u)|_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} 2\sin u du \\
&= 2(u\sin u + \cos u)|_0^{\sqrt{x}} \\
&= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}
\end{aligned}$$

når $x \geq 0$ (her er $u = \sqrt{t}$). Men dersom vi integrerer $f'(x)$ ledd for ledd får vi jo tilbake $f(x)$. Derfor har vi

$$f(x) = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}$$

når $x \geq 0$.

Oppgave 4



a)
Forandrer vi integrasjonsrekkefølgen får vi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \cos y^3 dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \cos y^3 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \cos y^3 \left(\int_0^{y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 y^2 \cos y^3 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} \cos u du \\ &= \frac{1}{3} \sin u|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \sin 1\end{aligned}$$

hvor vi har satt $u = y^3$.

b) De to flatene skjærer hverandre når $4 - y^2 = 2x^2 + y^2$, altså når $x^2 + y^2 = 2$. Spesielt ser vi $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$. Volumet blir da

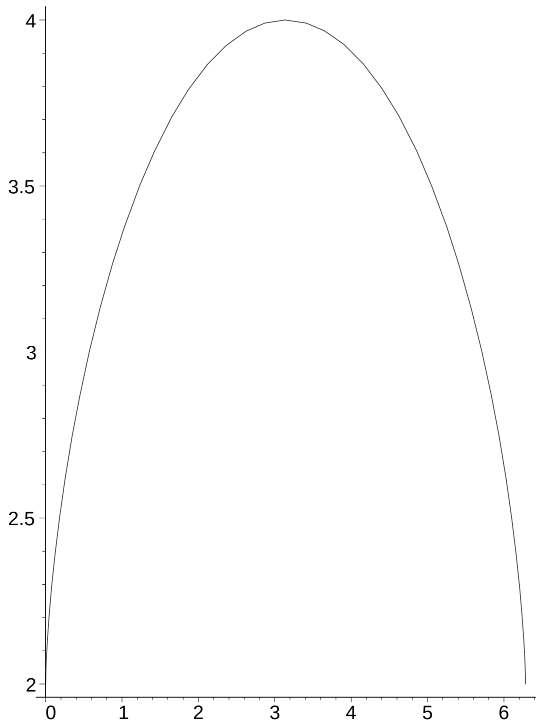
$$
\begin{aligned}
V = \iiint_S dV &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} dx \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz \\
&= 4 \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} dx \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz \\
&= 4 \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} (4 - y^2 - 2x^2 - y^2) dx \\
&= 8 \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} (2 - y^2 - x^2) dx \\
&= 8 \int_0^{\sqrt{2}} \left[\left((2 - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2-y^2}} \right] dy \\
&= \frac{16}{3} \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - y^2\right)^{3/2} dy
\end{aligned}
$$

Setter vi $y = \sqrt{2} \sin \theta$ får vi

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \\
&= \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
&= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Oppgave 5

a)



b) Lengden av kurven er gitt ved

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(2-2\cos 2t)^2 + (2\sin 2t)^2} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1-\cos 2t} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2 sin^2 t} dt \\ &= 4 \int_0^\pi \sin t dt \\ &= 8 \end{aligned}$$

hvor vi har brukt identiteten $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Oppgave 6

a) En funksjon $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ er *uniformt kontinuerlig* på et intervall I dersom det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

for alle $x, y \in I$.

b) f er en kontinuerlig funksjon. Vi vet at en kontinuerlig funksjon er uniformt kontinuerlig på et hvert lukket intervall. Derfor er f uniformt kontinuerlig på f. eks. $[0, 1]$.

Intervallet $[0, \infty)$ er et eksempel på et intervall hvor f ikke er uniformt kontinuerlig. For dersom f er uniformt kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$ så finnes det spesielt en $\delta > 0$ slik at

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < 1$$

for alle $x, y \in I$ (her har vi satt $\epsilon = 1$ i definisjonen på uniform kontinuitet). Men for alle δ så vil

$$\lim_{x\to\infty} f(x + \delta/2) - f(x) = \lim_{x\to\infty} (x + \delta/2)^3 - x^3 = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2}x^2\delta + \frac{3}{4}x\delta^2 + \frac{1}{8}\delta^3 = \infty,$$

så det finnes ingen δ som passer til $\epsilon = 1$. Spesielt kan ikke f være uniformt kontinuerlig.

c) Vi har

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

Bruker vi l'Hopitals regel et par ganger får vi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Setter vi $f(0) = 0$ og $f(1) = (1/\sin 1) - 1$ kan vi utvide f til en kontinuerlig funksjon på intervallet $[0, 1]$. Som nevnet over er en kontinuerlig funksjon på et lukket intervall alltid uniformt kontinuerlig. Spesielt blir da utvidelsen av f til $[0, 1]$ uniformt kontinuerlig. Da ser vi med en gang at f også blir uniform kontinuerlig.

(For ved definisjonen på uniform kontinuitet finnes for alle $\epsilon > 0$ en $\delta > 0$ slik at

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

for alle $x, y \in [0, 1]$. Da finnes det også opplagt for alle $\epsilon > 0$ en $\delta > 0$ slik at

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

for alle $x, y \in (0, 1)$. (Bare bruk samme δ.))