# Kortfattet løsningsforslag til eksamen i MAT112 HØST 04

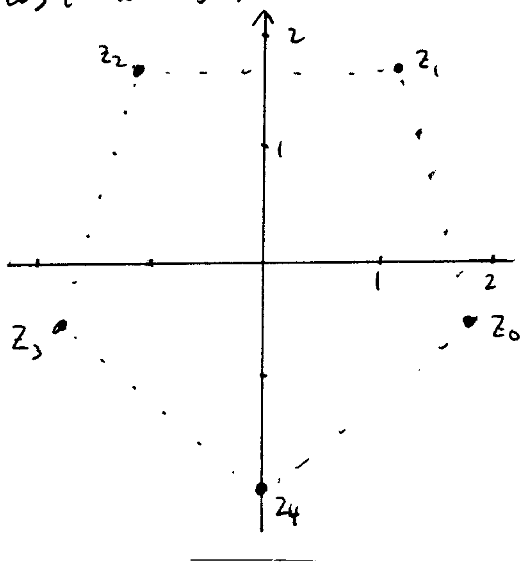
## Oppgave 1

a) $(4+3i)(2+i) = 5+10i$

$$\frac{4+3i}{2+i} = \frac{(4+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{11+2i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{2i}{5}$$

b) $z^5 = -32i = 32\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}\right)\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$$




## Oppgave 2

a) $F: 3x^2 - 2xy + y^2 - z^2 - 5 = 0$ La: $g(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + y^2 - z^2$

F er nivåflate til g

$$\nabla g = (6x-2y)\vec{i} + (2y-2x)\vec{j} - 2z\vec{k}$$

$$\nabla g(2,1,2) = 10\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Ligning for tangentplan: $10(x-2) - 2(y-1) - 4(z-2) = 0$

$\underline{10x - 2y - 4z = 10}$

b) Skal ha $\nabla g$ parallell med $\vec{i}$.

Da er: $y = x$, $z = 0$.

Setter inn i ligningen for $F$: $2y^2 = 5$, $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Punkter $\underline{\underline{\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \sqrt{\tfrac{5}{2}}, 0\right), \left(-\sqrt{\tfrac{5}{2}}, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}, 0\right)}}$

c) $\nabla g(2,1,2) = 10\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$

$$D_{\vec{u}}\, g = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot 0 = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$$

## Oppgave 3

a) $\vec{r}(t) = \sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \cdot \vec{k}$

$\vec{r}'(t) = \cos t \cdot \vec{i} - \sin t \cdot \vec{j} + t^{1/2} \cdot \vec{k}$

$\vec{r}''(t) = -\sin t \cdot \vec{i} - \cos t \cdot \vec{j} + \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2} \cdot \vec{k}$

$\vec{r}'(0) = \vec{i}$

$$\vec{r}'(0) \times (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\vec{j} + 2\vec{k}}}$$

b) $$L = \int_0^{15} |\vec{r}'(t)|\, dt = \int_0^{15} \sqrt{1+t}\, dt$$

$$= \Big|_0^{15} \tfrac{2}{3}(1+t)^{3/2} = \frac{128}{3} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{42}}$$

b). $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} + \dots$ $\quad |x|<1,\ x \neq 0.$

Lar vi $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ ses at $g(x)$ blir potensrekken over i hele intervallet $(-1, 1)$. Siden $g(x)$ er lik potensrekken i et intervall omkring $x=0$, må dette være Maclaurinrekken til $g(x)$.

c) Har $g(x)$ lik potensrekken over for $x \in [0,1)$. Siden $g(x)$ er kontinuerlig i $x=1$, og potensrekken også er det, må $g(x)$ være lik potensrekken på $[0,1]$. Får da:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^1 \frac{x^4}{3}dx + \dots + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n+1}dx + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)}$$

## Oppgave 5

a) $f(x,y) = \ln(3 - x + x^2 + y^2)$

$f_1(x,y) = \frac{-1+2x}{3-x+x^2+y^2}$ $\qquad$ Stasjonære punkter når $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$

$f_2(x,y) = \frac{2y}{3-x+x^2+y^2}$ $\qquad$ Som gir punktet: $\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}}$

# Oppgave 4

a) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad , \quad |x|<1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \cdots, \quad |x|<1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad , \quad |x|<1.$$

Siden $\ln(1+x)$ er lik denne potensrekken i et intervall omkring $x=0$, må dette være Maclaurinrekken til $\ln(1+x)$.

Finner $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$.

Så: Rekken konvergerer for $|x|<1$ og divergerer for $|x|>1$.

$x=1$: $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \cdots$, oppfyller alternerende rekketest
så: konvergerer.

$x=-1$: $\quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1} - \cdots$ , divergerer.

Konvergensintervall $\underline{\underline{(-1, 1]}}$.

b) Største og minste verdi forekommer enten i et

- stasjonært punkt i det indre av D : $(\frac{1}{2}, 0)$
- singulært punkt i det indre av D : ingen slike.
- på randen av D. På randen er $x^2+y^2=1$

så $f(x,y) = \ln(4-x) = g(x)$, $-1 \le x \le 1$

$$g'(x) = \frac{1}{x-4}$$

Derfor synker g på $[-1,1]$, så på randen forekommer ekstremalverdien i punktene $(-1,0)$ eller $(1,0)$.

Finner $f(-1,0) = \ln(5)$ , maksimal verdi

$f(\frac{1}{2},0) = \ln(\frac{4}{4})$ , minimal verdi

$f(1,0) = \ln(3)$

c) $g(x,y,z) = x^2-y^2-z$ ,

Skal finne største og minste verdi av g på kulen $x^2+y^2+z^2=1$

Kulen er lukket og begrenset. ~~Alt... Den har derfo~~

Derfor har g både et minimum og et maksimum på kulen.

Finner mulige kandidater ved Lagranges metode.

$$L(x,y,z) = x^2-y^2-z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$\partial L/\partial x = 2x+2x\lambda$ $\qquad$ $\partial L/\partial z = -1+2\lambda z$

$\partial L/\partial y = -2y+2y\lambda$ $\qquad$ $\partial L/\partial \lambda = x^2+y^2+z^2-1$

Hvis $x \cdot y \neq 0$ så ingen løsninger.

Hvis $x \neq 0$ er $y = 0$, $\lambda = -1$ og $z = -1/2$. Får $x = \pm\sqrt{3}/2$

Hvis $y \neq 0$ er $x = 0$, $\lambda = 1$ og $z = 1/2$ får $y = \pm\sqrt{3}/2$.

Hvis $x = y = 0$ får $z = \pm 1$.

Verdier av kritiske punkter:

$$g(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}) = 5/4 \quad g(0, \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}) = -5/4, \quad g(0,0,1) = -1$$
$$g(0,0,-1) = 1.$$

Største verdi er $5/4$, minste verdi er $-5/4$.

## Oppgave 6

a) $f$ er uniformt kontinuerlig på $I$ om det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ s.a. for $x_1, x_2 \in I$ gjelder det

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

b) Anta $|f'(x)| \leq M$ på $I$

La $x_1 < x_2$ være to punkter i $I$. Middelverdisetningen gir.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad \text{Så: } |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

Gitt $\varepsilon > 0$, velg da $\delta = \varepsilon/M$.

c) $f(x) = \begin{cases} 5, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ -5, & x < 0 \end{cases}$ For $\varepsilon > 0$ velg partisjonen $\Pi = \{-1, -\varepsilon, \varepsilon, 1\}$.

Får: $U_\Pi(f) = (1-\varepsilon)\cdot 5 + 2\varepsilon \cdot 5 + (1-\varepsilon)(-5) = 10\varepsilon$

$L_\Pi(f) = (1-\varepsilon)\cdot 5 + 2\varepsilon\cdot(-5) + (1-\varepsilon)\cdot(-5) = -10\varepsilon$.

Så: $U_\Pi(f) - L_\Pi(f) = 20\varepsilon$.

ALTSÅ: Vi kan få dette så lite vi ønsker. Derfor er $f$ Riemannintegrerbar på $[-1,1]$.