BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT112 - Grunnkurs i matematikk II

Mandag 8. november 2004, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator.

Oppgave 1

a) Skriv de komplekse tallene $(4+3i)(2+i)$ og $\frac{4+3i}{2+i}$ på formen $a+bi$ der a og b er reelle tall.

b) Finn alle de komplekse røttene til ligningen $z^5 = -32i$ og tegn dem inn i det komplekse planet.

Oppgave 2

Gitt flaten F ved ligningen $3x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = 5$.

a) Finn tangentplanet til flaten i punktet $P = (2, 1, 2)$

b) Finn alle punktene på F der tangentplanet er parallellt med yz-planet.

c) La $g(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + y^2 - z^2$. Finn den retningsderiverte til g i punktet P i retningen gitt ved $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$.

Oppgave 3

En kurve C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \sin t \cdot \mathbf{i} + \cos t \cdot \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2} \cdot \mathbf{k}$$

der t varierer i intervallet $[0, 15]$.

a) Finn $\mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{r}''(t)$. Hva blir kryssproduktet mellom $\mathbf{r}'(0)$ og $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$?

b) Finn lengden av kurven C.

Oppgave 4

a) Finn MacLaurinrekken til $f(x) = ln(1 + x)$ og angi konvergensintervallet.

b) La $g(x)$ være gitt ved $g(0) = 1$ og $g(x) = \frac{ln(1+x^2)}{x^2}$, $x \neq 0$. Vis at der finnes en potensrekke $\sum_0^\infty a_n x^n$ slik at $g(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ gjelder for $|x| < 1$. Er dette MacLaurinrekken til g?

c) Vis at $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)}$.

Oppgave 5

a) Finn alle stasjonære punkter til $f(x, y) = \ln(3 - x + x^2 + y^2)$.

b) Finn største og minste verdi for $f(x, y)$ over området

$$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

c) Finn største og minste verdi til $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ når

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Oppgave 6

a) Gi definisjonen av uniform kontinuitet.

b) Vis at dersom f er deriverbar på et intervall I og f' er begrenset på I, så er f uniformt kontinuerlig på I.

c) Vis at funksjonen $f(x) = \begin{cases} 5x/|x|, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ er Riemannintegrerbar på intervallet $[-1, 1]$.

Gunnar Fløystad