LÖSNING MAT 112 - eks 9/6 - 2004

1 a Den geometriske rekken $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ konvergerer for $|x|<1$. Leddvis integrasjon gir $\ln(1+x) =$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_0^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

gyldig for $|x|<1$. Dette blir derfor MacLaurin rekka for $\ln(1+x)$.

b) For $|x|<1$ har vi konvergens ut fra 1.a. For $x=1$ får vi rekka $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ som konvergerer betinget da $\frac{1}{n}$ avtar monotont mot null. For $x=-1$, får vi rekka $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ som er den harmoniske rekka og dermed divergent. Konklusjon: Konvergens-intervallet blir $(-1, 1]$.

c) Fra 1a har vi $\ln(1-x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$ når $|x|<1$.

Dermed er $\frac{\ln(1-x)}{(-x)} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$, eller $\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $0<|x|<1$

Det følger at $g(x) = \sum_0^{\infty} -\frac{x^n}{n+1}$ for $0<|x|<1$, men siden $g(0)=-1$, gjelder rekkeutviklingen for $|x|<1$. Dette blir derfor MacLaurin rekka for g (Kfr. Teorem 21 side 565 i ADAMS)

d) For $|x|<1$ har vi fra 1c at

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_0^{\infty} \int_0^x \frac{-t^n}{n+1}\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1} = -\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Pr. definisjon er $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. Videre gir Abels teorem at $\lim_{x\to 1^-} \left(-\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right) = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Formelen gjelder derfor og for $x=1$

2 a) Sett $G(x,y,z) = 2x^2+3y^2-z^2$. Vi har $\nabla G = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} - 2z\vec{k}$ og $\nabla G(1,1,-2) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

Tangentplanets likning blir dermed $4(x-1)+6(y-1)+4(z+2)=0$

b) Skal ha $\nabla G = c\vec{j}$ for en $c \neq 0$. Dette gir alle punkt på flaten der $x=0$, $z=0$ og $y\neq 0$. Siden flaten er gitt ved $2x^2+3y^2-z^2=1$ finner vi punktene $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$

2c Skal ha $4x\vec{i}+6y\vec{j}-2z\vec{k} = c(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ for en $c \neq 0$. Hvis $x \neq 0$, må $c = 4$ og $y = z = 0$. Dette gir punktene $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$. Analogt finner vi punktene $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ og dette er de eneste punktene da $2x^2+3y^2-z^2=1$ ikke har noen løsning med $z \neq 0$ og samtidig $x = y = 0$

3a) $f(x,y) = x^4+xy+y^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3+y = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x+2y = 0\end{aligned}\right\} \text{ gir } 4(-2y)^3+y=0 \text{ eller } y(1-32y^2)=0$$

som gir punktene $(0,0)$, $(\frac{2}{\sqrt{32}}, \frac{-1}{\sqrt{32}})$ og $(\frac{-2}{\sqrt{32}}, \frac{1}{\sqrt{32}})$

b) Ingen av de stasjonære punktene ligger innenfor det oppgitte området. Da dette området er lukket og begrenset, vil f oppnå abs max og abs min. Vi drøfter nå randpunktene:

(i) $f_1(x) = f(x,0) = x^4$, $x \in [0,1]$, har $f_1' = 4x^3 > 0$ på $(0,1)$. $f_1(0) = f(0,0) = 0$, $f_1(1) = f(1,0) = 1$

(ii) $f_2(y) = f(0,y) = y^2$, $y \in [0,1]$, har $f_2'(y) = 2y > 0$ på $(0,1)$. $f_2(1) = f(0,1) = 1$. $f_2(0) = f(0,0)$.

(iii) $f_3(x) = f(x, 1-x) = x^4-x+1$, $0 \le x \le 1$.
$f_3'(x) = 4x^3-1 = 0$ for $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Fra (i), (ii) og (iii) følger at mulige ekstrempunkt for f er $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ og $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$
Ved innsetting finner vi $f_{max} = 1$ og $f_{min} = 0$

c) Bruker Lagranges metode. Vi skal ha
(1): $4x^3+y = \lambda 2x$ og (2): $x+2y = \lambda 2y$. Fra (1) og (2) finner vi $4x^3y+y^2 = x^2+2xy$, eller
$4x^3y-2xy = x^2-y^2 = x^2-(1-x^2) = 2x^2-1$ slik at
$2xy(2x^2-1) = 2x^2-1$. $2x^2-1=0$ gir punktene
$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ (Alle mulige fortegnsvalg)

3c forts: Hvis $2x^2-1 \neq 0$, må $2xy = 1$. Settes $y = \frac{1}{2x}$ inn i $(*)$: $x^2+y^2-1 = 0$, finner vi $x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1$, eller $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$, som gir $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Men da $y = \frac{1}{2x}$, finner vi ingen nye punkt. Ved innsetting finner vi $f_{max} = \frac{5}{4}$ og $f_{min} = \frac{1}{4}$

4) a) $\bar{r}'(t) = \bar{i} + 2t\bar{j} + 2t^2\bar{k}$ og $\bar{r}''(t) = 2\vec{j} + 4t\vec{k}$

b) $|\bar{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2$. Lengden av C blir $\int_0^T |\bar{r}'(t)|\,dt = \int_0^T (1+2t^2)\,dt = \Big|_0^T \left[t + \frac{2}{3}t^3\right]$

$= \underline{\underline{T + \frac{2}{3}T^3}}$

c) $\nabla g = 2y\bar{i} + 2x\bar{j} - 3\bar{k}$

$D_{\bar{u}}\, g(1,1,2/3) = \nabla g(1,1,2/3) \cdot \bar{u} = (2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) \cdot \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\nabla g = 2t^2\bar{i} + 2t\vec{j} - 3\bar{k}$ i $P_t: (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$

Dermed er

$\nabla g \cdot \bar{r}'(t) = 2t^2 \cdot 1 + 2t \cdot 2t + 2t^2 \cdot (-3) = 0$