LÖSNING MAT 112 - UNDERVEGSEKSAMEN V. 05

Oppgave 1 a) Siden $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ på $(0, \infty)$, blir f strengt voksende på $[0, \infty)$

b) Vil vise at $x_n < x_{n+1}$ for alle n. Siden $x_1 = 1$ og $x_2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$, gjelder ulikheten for $n = 1$. Anta $x_k < x_{k+1}$. Fra a) følger at $f(x_k) < f(x_{k+1})$, slik at $x_{k+1} < x_{k+2}$. Ved induksjon gjelder ulikheten for alle n.

c) Ulikheten $x_n \leq 4$ gjelder for $n = 1$. Anta nå at $x_k \leq 4$. Da er $x_{k+1} = \frac{x_k}{3} + \sqrt{x_k} \leq \frac{4}{3} + \sqrt{4} \leq 4$

Altså gjelder $a_n \leq 4$ for alle n ved induksjon.

d) Fra b) og c) er $\{x_n\}$ monoton og begrenset, og dermed konvergent. (Kompletthetsaksiomet)

La $L = \lim_{n\to\infty} x_n$. Av $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + \sqrt{x_n}$ får vi når $n \to \infty$ at $L = \frac{L}{3} + \sqrt{L}$. Dermed er $\frac{2}{3} L = \sqrt{L}$ og da $L \geq 1$ må $\sqrt{L} = \frac{3}{2}$ og $\underline{\underline{L = \frac{9}{4}}}$

Oppgave 2

a) $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+3} \; \frac{n+2}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} = |x|$$

Dermed gir forholdskriteriet: Konvergens for $|x| < 1$ og divergens for $|x| > 1$. For $x = 1$ får vi $\sum_1^\infty \frac{1}{n+2}$ som divergerer da $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$. For $x = -1$ får vi rekken $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{n+2}$ som konvergerer betinget da $\frac{1}{n+2}$ avtar monotont mot null. Konvergens-intervallet blir altså $[-1, 1)$.

2b) $T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2-1+1}{1-x} = -(x+1) + \frac{1}{1-x}$

Dermed $T(x) = \int_0^x \left(-t-1+\frac{1}{1-t}\right) dt + T(0)$

$= -\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)$ siden $T(0) = 0$.

c) Siden $T(x) = x^2 S(x)$, gjelder at $S(x) = \frac{1}{x^2} T(x)$ når $|x|<1$. Altså er $S(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}$ for $|x|<1$. Dermed er $\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right)$

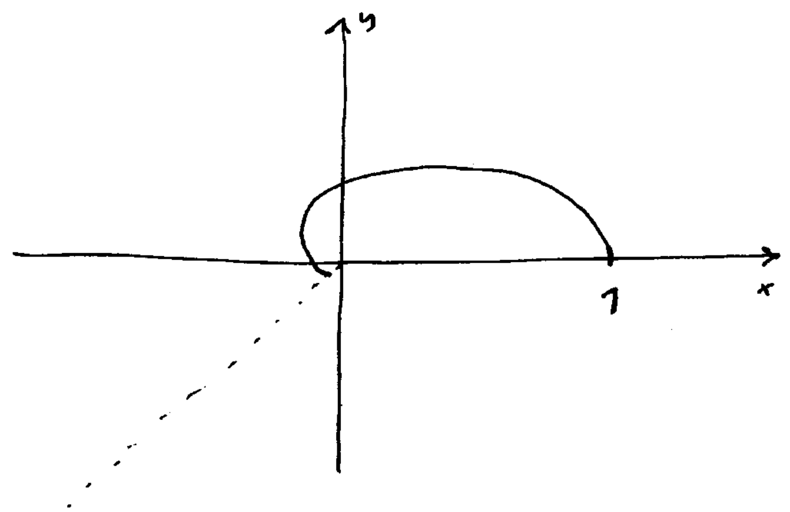
$= \lim_{x \to 0} S(x) = S(0) = 0$

3) a) $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (e^{-\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\Big|_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(1-e^{-2\pi})}}$

b) $L(C) = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{(e^{-\theta})^2 + (-e^{-\theta})^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2e^{-2\theta}}\, d\theta$

$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{5\pi}{4}} e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2}\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} (-e^{-\theta}) = \sqrt{2}\left(1 - e^{-\frac{5\pi}{4}}\right)$

c)



Oppgave 4

i) Da $g'(x) = \cos x$, har vi $|g'(x)| \le 1$ for alle x. Til gitt $\varepsilon > 0$ kan vi velge $\delta = \varepsilon$. Hvis $|x-y| < \delta$, har vi

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)(x-y)| \le |x-y| < \varepsilon.$$

ut fra middelverdiretningen.

ii) $h(x) = \sin(x^2)$ blir ikke uniformt kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$. Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Anta det fantes $\delta > 0$ slik at

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \tfrac{1}{2}.$$

Velg $x = x_n = \sqrt{2\pi n}$ og $y = y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

Da er $|h(x_n) - h(y_n)| = |\sin(2\pi n) - \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2})| = 1$

og $$y_n - x_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi n} = \frac{(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi n}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2\pi n}}$$

Dermed vil $0 < y_n - x_n < \delta$ for store n, og likevel vil $|h(x_n) - h(y_n)| > \frac{1}{2} = \varepsilon$

Motsigelsen gir at h ikke er uniformt kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$.