LÖSNING MAT112-EKSAMEN 15/6-2005

1) a) Siden $\nabla g = 2x\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, blir den retningsderiverte lik $\nabla g(1,1,1) \cdot (\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Störst umiddelbar økning i retningen gitt ved $\nabla g(1,0,0) = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$

c) Bruker Lagranges metode og skal ha

(*) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ og

(1) $2x = \lambda 2x$
(2) $-2 = \lambda 2y$
(3) $1 = \lambda 2z$

(1) og (2) gir $2xy = -2x$, eller $2x(y+1) = 0$

<u>Hvis $x = 0$</u>, må $-2z = y$ (Fölger av (2) og (3))
som gir $(-2z)^2 + z^2 = 2$ og $z = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$.
Det gir punktene $(0, -\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$ og $(0, \sqrt{\frac{8}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}})$.

<u>Hvis $x \neq 0$</u>, må $\lambda = 1$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$. Det gir punktene $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2})$. Ved innretting i disse fire punktene finner vi

$g_{max} = \frac{13}{4}$, $g_{min} = -\sqrt{10}$

2) a)
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n+2} x^{n+1}}{\frac{n}{n+1} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} |x| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} |x| = |x|.$$ Altså konv. for $|x| < 1$.

For $x = \pm 1$, vil $\left|\frac{n}{n+1} x^n\right| \to 1$ når $n \to \infty$.
Konvergens intervallet blir dermed $(-1,1)$

2b

$$S(x) = \sum_0^\infty \frac{n}{n+1} x^n = \sum_0^\infty \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_0^\infty x^n - \sum_0^\infty \frac{1}{n+1} x^n$$

Vi har $\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$. Sett $T(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Da er $T'(x) = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$. Det gir

$T(x) = -\ln(1-x) + C$, og da $T(0) = 0$, må $C = 0$. Altså er $T(x) = -\ln(1-x)$, og vi finner $S(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$ for $0 < |x| < 1$

2c

Konvergensradien R blir lik 1 hvis ikke $r \geq 0$ er et heltall. Hvis $r \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, blir $R = \infty$.

2d

Vi har $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} = \sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{3}}{n} x^n$

der $\binom{-\frac{1}{3}}{0} = 1$ og $\binom{-\frac{1}{3}}{n} = \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)\cdots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!}$

for $n \geq 1$. Dermed får vi (ved å bytte x med x^4)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-\frac{1}{3}}{n} x^{4n} \quad \text{for } |x| < 1.$$

Vi har $\left| \frac{\binom{-\frac{1}{3}}{n+1} x^{4(n+1)}}{\binom{-\frac{1}{3}}{n} x^{4n}} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{3} - n}{n+1} x^4 \right| < 1$ for $|x| < 1$

Rekken $\sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{3}}{n} x^n$ blir dermed alternerende og absoluttverdien av det n'te leddet avtar monotont mot null når $n \to \infty$ og $|x| \leq \frac{1}{2}$. Altså

2d forts)

gjelder $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} \approx 1 - \frac{x^4}{3}$ med en feil

begrenset av $\binom{-1/3}{2} x^8 = \frac{(-1/3)(-4/3)}{2} x^8 = \frac{2}{9} x^8.$

Feilen i integralet er derfor avgrenset

av $\int_0^{1/2} \frac{2}{9} x^8 \, dx = \frac{2^{-8}}{81}$

3

a) $f(x,y) = 1 + \frac{4}{3} x^3 + 4y^3 - x^4 - y^4$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 - 4x^3 = 4x^2(1-x) = 0$ for $x=0$ eller $x=1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 - 4y^3 = 4y^2(3-y) = 0$ for $y=0$ eller $y=3$

De stasjonære punktene blir dermed $(0,0)$, $(0,3)$, $(1,0)$ og $(1,3)$.

b) Skal finne max/min av f over området gitt ved $x^4 + y^4 \leq 1$.

Fra 3a ser vi at $(0,0)$ er det eneste stasjonære punktet innenfor randen til området. Vi merker oss at $f(0,0) = 1$

Vi drøfter nå f på randen. Der kan vi sette $f = g(x,y) = \frac{4}{3} x^3 + 4y^3$. Bruker Lagranges metode til å finne max/min av g når (*) $x^4 + y^4 = 1$

Skal ha $4x^2 = \lambda 4x^3$ og $12y^2 = \lambda 4y^3$

Det gir $4x^2y^3 = 12y^2x^3$, eller

$4x^2y^3 - 12y^2x^3 = 4x^2y^2(y - 3x) = 0$

3b forts.

Vi har flere muligheter:

i) $x = 0$ gir $y = \pm 1$ (fra (*)) som gir punktene $(0, \pm 1)$. Vi har $g(0,1) = 4$, $g(0,-1) = -4$

ii) $y = 0$ gir punktene $(\pm 1, 0)$.
Vi har $g(1,0) = \frac{4}{3}$, $g(-1,0) = -\frac{4}{3}$

iii) $y = 3x$ gir i (*) $x^4 + 81x^4 = 1$, eller $x = \pm\left(\frac{1}{82}\right)^{1/4}$. Vi får $y^4 = 1 - \frac{1}{82}$ slik at $y = \pm\left(\frac{81}{82}\right)^{1/4} = \frac{\pm 3}{\sqrt[4]{82}}$

Vi finner (ved kalkulator) at

$g_{max} = g\left(\frac{1}{82^{1/4}}, \left(\frac{81}{82}\right)^{1/4}\right)$ og

$g_{min} = g\left(\frac{-1}{82^{1/4}}, -\left(\frac{81}{82}\right)^{1/4}\right)$. Dette

blir og ekstremverdiene til f over området gitt ved $x^4 + y^4 \leq 1$

4)

a) $\bar{r}(t) = t\,\bar{i} + 2\sqrt{2}\,t^2\,\bar{j} + (t^2-4t)\,\bar{k}$

$\bar{r}'(t) = \bar{i} + 4\sqrt{2}\,t\,\bar{j} + (2t-4)\,\bar{k}$

$\bar{r}''(t) = 4\sqrt{2}\,\bar{j} + 2\,\bar{k}$

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 4\sqrt{2}\,t & 2t-4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 16\sqrt{2}\,\bar{i} + (-2)\,\bar{j} + 4\sqrt{2}\,\bar{k}$$

b) Punktet $P:(1, 2\sqrt{2}, -3)$ svarer til $t=1$

En tangentvektor vil være

$\bar{v} = \bar{r}'(1) = \bar{i} + 4\sqrt{2}\,\bar{j} - 2\,\bar{k}$

Lengden av kurven mellom origo og P blir $\int_0^1 |\bar{r}'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 32t^2 + 4t^2 - 16t + 16}\,dt$

c) La $\bar{n}$ være en normalvektor til planet. Siden $\bar{r}(t)$ ligger i planet for alle t, er $\bar{n} \cdot \bar{r}(t) = 0$. Fra vinkel følger at $\bar{n} \cdot \bar{r}'(t) = 0$. Brukes vinkel ennå en gang, får vi $\bar{n} \cdot \bar{r}''(t) = 0$.

Siden både $\bar{r}'(t)$ og $\bar{r}''(t)$ er normale til $\bar{n}$, må $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)$ bli parallell med $\bar{n}$, og derfor normal til planet.