NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i MAT 112 - Grunnkurs i matematikk II

Onsdag 15. juni 2005, kl. 09.00 - 13.00

Tilletne hjelpemiddel: kalkulator utan grafisk display.

Oppgåve 1

La $g(x, y, z) = x^2 - 2y + z$.

a) Finn den retningsderiverte av g i punktet $(1,1,1)$, i retninga gitt ved $\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$.

b) I kva for retning ut fra punktet $(1,0,0)$ får g størst umiddelbar auking?

c) Finn største og minste verdi til g på kuleflata $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Oppgåve 2

a) Finn konvergensintervalet til rekkja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$

b) Finn eit enkelt uttrykk for summen $S(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ for $0 < |x| < 1$.

c) Gitt binominalrekkja $(1+x)^r = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ der r er eit gitt reellt tall. Kva kan du si om konvergensradien til denne rekkja for ulike verdier av r? (Noe bevis krevjest ikkje).

d) Angi Mac Laurinrekken til $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$. Gi eit overslag over feilen i tilnærminga $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} \approx \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{x^4}{3}) dx$.

Oppgåve 3

La $f(x, y) = 1 + \frac{4}{3}x^3 + 4y^3 - x^4 - y^4$.

a) Finn funksjonens stasjonære punkter.

b) Finn største og minste verdi til $f(x, y)$ når $x^4 + y^4 \leq 1$.

Oppgåve 4

Ei kurve C er gitt ved $\overline{r}(t) = t\,\overline{i} + 2\sqrt{2}t^2\,\overline{j} + (t^2 - 4t)\overline{k}$.

a) Finn $\overline{r}'(t)$, $\overline{r}''(t)$ og rekn ut $\overline{r}'(t) \times \overline{r}''(t)$.

b) Kurva går gjennom origo og punktet $P : (1, 2\sqrt{2}, -3)$. Finn ein vektor som tangerer kurva i P. Finn dessuten et integral som gir lengda av kurva mellom origo og P. (Integralet treng du ikkje rekne ut).

c) Prøv til slutt å vise at hvis ei vilkårleg kurve $C_1 : \overline{r}(t) = f(t)\overline{i} + g(t)\overline{j} + h(t)\overline{k}$ ligg i eit plan gjennom origo, så vil $\overline{r}'(t) \times \overline{r}''(t)$ vera normal til planet.

Vink: Hvis $\overline{u}(t) = u_1(t)\overline{j}, + u_2(t)\overline{j} + u_3(t)\overline{k}$ og $\overline{n}$ er ein gitt vektor, så er $\frac{d}{dt}(\overline{u} \cdot \overline{n}) = \overline{u}'(t) \cdot \overline{n}$.

Arne Stray

Per Manne