Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet. H.2006.

EKSAMEN I EMNET MAT112-Grunnkurs i matematikk II

25 september 2006, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator.

Oppgave 1

En kurve C er gitt ved $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\,\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\,\vec{k}$ for $t \in [0, s]$ der $s > 0$ er gitt.

(a) Finn $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$ og $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$.

(b) Finn lengden av kurven.

(c) La $h(x, y, z) = ln(2 + 2x^2y^2 - 9z^2)$. Grunngi at kurven C ligger på flaten gitt ved likningen $h(x, y, z) = ln2$ .Finn gradienten til h og finn den retningsderiverte til h i punktet P:$(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \frac{1}{3}\ )$ i retningen gitt ved kurvens tangent i P

Oppgave 2

(a) Finn største og minste verdi til funksjonen

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

over området D gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) La $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + e^z$. Finn gradienten $\nabla g(x, y, z)$ og finn likningen for tangentplanet til flaten gitt ved

$$x^2 + 2y^2 + e^z = 7$$

i punktet P(2,1,0).

(c) Finn mulige punkt på flaten gitt ved $x^2 + 2y^2 + e^z = 7$ der tangentplanet er parallellt med planet gitt ved $x + y - z = 14$.

Oppgave 3

Gitt kurven C i polarkoordinater ved

$$r = sin\theta + cos\theta$$

for $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(a) Finn arealet avgrenset av kurven , x-aksen og y-aksen.

(b) Finn lengden av kurven.

Oppgave 4

(a) Skriv opp Mac-Laurin rekkene til funksjonene $sinx$ og $cosx$ og angi konvergensintervallene.

(b) Angi verdien av $\int_0^1 \frac{sin(x)}{x} dx$ ved en uendelig rekke og finn hvor mange ledd du må ta med i rekken for å beregne integralet med en nøyaktighet på 10^{-2}.

(c) La $g(x) = (sinx)(cosx) + \frac{1-cos\sqrt{x}}{x}$. Finn en potensrekke for $g(x)$ som gjelder når $0 < |x| < \infty$.

Oppgave 5

(a) Gi definisjonen av uniform kontinuitet for en funksjon f definert på et intervall I.

(b) Grunngi hvorfor $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ er uniformt kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$.

(c) La f være en kontinuerlig funksjon på et endelig intervall [a,b] slik at $f(x) > 0$ for alle x i [a,b].Vis at da er $\frac{1}{f}$ uniformt kontinuerlig på [a,b].

Arne Stray