Lösning M112-eksamen 14/6 - 2006

1) $\bar{r}(t) = t^2\bar{i} + (1-t)\bar{j} + \frac{2}{3}t^3\bar{k}$, $t \in [0,s]$

a) $\bar{r}'(t) = 2t\,\bar{i} - \bar{j} + 2t^2\,\bar{k}$

$\bar{r}''(t) = 2\bar{i} + 4t\,\bar{k}$

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t & -1 & 2t^2 \\ 2 & 0 & 4t \end{vmatrix} = -4t\,\bar{i} - 4t^2\bar{j} + 2\bar{k}$$

b) $L(c) = \int_0^s |\bar{r}'(t)|\,dt = \int_0^s \sqrt{4t^2+4t^4}\,dt = \int_0^s \sqrt{1+t^2}\,2t\,dt$

$= \Big|_0^s \frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2} = \frac{2}{3}\left[(1+s^2)^{3/2} - 1\right]$

c) $h(x,y,z) = \frac{e^{xy}}{z+1} \Rightarrow \nabla h = \frac{ye^{xy}}{z+1}\bar{i} + \frac{xe^{xy}}{z+1}\bar{j} - \frac{e^{xy}}{(z+1)^2}\bar{k}$

$\nabla h(1,0,\frac{2}{3}) = \frac{1}{1+2/3}\bar{j} - \frac{1}{(1+2/3)^2}\bar{k} = \frac{3}{5}\bar{j} - \frac{9}{25}\bar{k}$

Punktet $(1,0,2/3)$ svarer til $t=1$

$\bar{r}'(1) = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$. Siden $|\bar{r}'(1)| = \sqrt{9} = 3$,
blir den retningsderiverte lik

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{25}\right) = \frac{-11}{25}$$

2 $\quad f(x,y) = x^3 - xy + y^2$

a) Söker stasjonære punkt : $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0$$

Vi finner ved å eliminere y: $6x^2 - x = 0$
som gir punktene $(0,0)$ og $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ der
bare $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ er innenfor randen.

$$f(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{12}) = \frac{1}{216} - \frac{1}{72} + \frac{1}{144} = \frac{-1}{432}$$

Drøfter randen

1) $h_1(x) = f(x,0) = x^3$, $0 \le x \le 1$, er strengt voksende $h_1(1) = f(1,0) = 1$, $h_1(0) = f(0,0) = 0$

2) $h_2(y) = f(0,y) = y^2$, $0 \le y \le 1$, er strengt voksende, $h_2(0) = 0$, $h_2(1) = f(0,1) = 1$.

3) Det gjenstår å se etter mulige ekstrem-punkt på linjestykket fra $P_1: (0,1)$ til $P_2 (1,0)$. Her brukes vi Lagranges metode!

Skal ha
$$3x^2 - y = \lambda$$
$$2y - x = \lambda$$

som gir $3x^2 - y = 2y - x$ eller $x^2 + \frac{x}{3} = y$

Siden $x + y = 1$, finner vi $x^2 + \frac{x}{3} = 1 - x$

eller $x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 0$, slik at $x = \frac{-2 (\pm) \sqrt{13}}{3}$

Bare "+"-tegnet er ok. da $x \ge 0$ og $y \ge 0$.

Vi får $x = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}$, $y = \frac{5 - \sqrt{13}}{3}$

Vi finner $f(x,y) \approx 0{,}12$ slik at

$f_{max} = 1$ og $f_{min} = \frac{-1}{432}$

2b,

$$\nabla g = 2x\,\bar{i} + 4y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$$

$$\nabla g(2,1,3) = 4\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}$$

Tangentplanets likning blir:

$$4(x-2) + 4(y-1) + 6(z-3) = 0$$

2c,

Skal ha $\nabla g = t(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$

for en $t \neq 0$. Altså

$$2x\,\bar{i} + 4y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k} = t\bar{i} + t\bar{j} + t\bar{k}$$

Det gir $x = \frac{t}{2}$, $y = \frac{t}{4}$ og $z = \frac{t}{2}$

Innsatt i flatelikningen:

$$\frac{t^2}{4} + 2\frac{t^2}{16} + \frac{t^2}{4} = 15$$

som gir $t = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$

Vi finner altså punktene

$P_1: (\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6})$ og $P_2: (-\sqrt{6}, \frac{-\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6})$

3) $r = 1 - \theta^2 \quad , \; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

a) $$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\theta^2)^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\theta^2 + \theta^4)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\theta - \frac{2}{3}\theta^3 + \frac{\theta^5}{5}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi^5}{5}\,\frac{1}{1024}$$

(b) $$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(1-\theta^2)^2 + (-2\theta)^2}\, d\theta = \int_0 \sqrt{1 + 2\theta^2 + \theta^4}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \theta^2)\, d\theta = \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\theta + \frac{2}{3}\theta^3\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\,\frac{\pi^3}{64}$$

c) Generelt er $\tan\psi = \frac{1-\theta^2}{-2\theta}$. Vi skal ha $\frac{1-\theta^2}{-2\theta} = -\sqrt{3}$, eller $\theta^2 + 2\sqrt{3}\,\theta - 1 = 0$
som gir $\theta = -\sqrt{3} \,(\pm)\sqrt{3+1}$, eller $\theta = 2 - \sqrt{3}$
da $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Dermed er P bestemt,
da $r = 1 - \theta^2$.

4) a) $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n}$$

$$\tan^{-1}(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

4. forts

b) Vi har $\dfrac{\tan^{-1} x}{x} = \sum_0^\infty (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$

for $0<|x|<1$. (Likhet og for $x=0$, hvis vi setter $\dfrac{\tan^{-1}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1}(x)}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim \dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{1} = 1$ for $x=0$). Ved leddvis integrasjon er

$$\int_0^z \frac{\tan^{-1}(x)}{x}\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad , 0 \leq z < 1$$

Når $z \to 1$ vil venstresiden gå mot $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx$ og høyresiden mot $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$ grunnet Abels kontinuitetssetning. Altså gjelder likheten i pkt b.

c) Setter $g(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \dfrac{x^n}{(2n+1)}$, $|x|<1$

Vi har $g(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \dfrac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \dfrac{\tan^{-1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

for $0<x<1$, fra pkt b).

Hvis $-1<x<0$, setter vi $t=\sqrt{-x}$ slik at $t^2=-x$ og $x=-t^2$. Det gir

$$g(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} = \sum_0^\infty \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

4 forts:

La $h(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$. Vi finner

$$h'(t) = \sum_0^\infty t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$$

og $h(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$. Det gir

$$g(x) = \sum_0^\infty \frac{t^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{t}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$$

for $-1 < x < 0$.

5 a) For alle $\varepsilon > 0$, fins $\delta > 0$ slik at hvis $x_1, x_2 \in I$ og $|x_1 - x_2| < \delta$, så er $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

b) Gitt $\varepsilon > 0$. Velg $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Hvis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 = a$, $x_2 + a + h$ og $0 < h < \delta$, så er

$$0 < f(x_2) - f(x_1) = 5(x_2 - x_1) = 5h < 5\delta = \varepsilon$$

c) Gitt $\varepsilon > 0$. Velg $\delta > 0$ slik at $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Da er

$$|h(x_1)^2 - h(x_2)^2| = |(h(x_1) + h(x_2))(h(x_1) - h(x_2))|$$

$$\leq 2M\,|h(x_1) - h(x_2)| < 2M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Q.E.D.