Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet. 2007.

EKSAMEN I EMNET MAT112-Grunnkurs i matematikk II

13 juni 2007, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator.

Oppgave 1

(a) Avgjør konvergens/divergens for rekkene : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3+n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}+1}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

(b) Finn Mac Laurin rekkene til $sinx$ og $(1-\frac{sinx}{x})$. Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty}(1-nsin\frac{1}{n})$ konvergerer.

(c) Bruk rekkeutviklingen $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ til å finne Mac Laurin rekken til $\sqrt{1+x^3}$.

(d) Regn ut $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}dx$ med en feil mindre enn $\frac{1}{1000}$.

Oppgave 2

(a) Skisser kurven C : $r = e^{-\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

(b) Finn arealet avgrenset av kurven og x-aksen.

(c) Finn lengden av den delen av kurven som ligger i 1 kvadrant.

(d) La P være et punkt på C og la ψ være vinkelen mellom radiusvektor fra origo til P og tangenten til kurven i P. Vis at ψ er 135^o. Bestem P slik at tangenten blir horisontal.

Oppgave 3

La $g(x,y,z) = x + \sqrt{y} + z^2$, $x > 0, y > 0, z > 0$.

(a) Finn gradienten til g og finn den retningsderiverte til g i punktet P:(1,4,2) i retningen gitt ved $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$

(b) Finn likningen for tangentplanet til flaten gitt ved

$$(*) : x + \sqrt{y} + z^2 = 3$$

i punktet Q:(1,1,1).

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Finn mulige ekstremal verdier til $f(x,y,z)$ når

$$(*) : x + \sqrt{y} + z^2 = 3$$

(der $x, y, z > 0$), ved Lagranges metode.

Oppgave 4

(a) La $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - x$. Finn de kritiske (stasjonære) punktene til f.

(b) Finn største og minste verdi til f over området D gitt ved at $x \geq 0$,$y \geq 0$ og $x^2 + 4y^2 \leq 1$. (Vink : På den delen av randen til D som er del av en ellipse, kan en med fordel forenkle uttrykket for f.)

Oppgave 5

(a) Gi definisjonen av uniform kontinuitet for en funksjon f definert på et intervall I.

(b) Grunngi hvorfor $f(x) = \frac{1}{2+sinx}$ er uniformt kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$.

(c) La f være en uniformt kontinuerlig funksjon på (0,1). Vis at da er f begrenset på (0,1).

Per Manne

Arne Stray