LÖSNING MAT 112 13/6 - 2007

1)

a) $\sum_1^\infty \frac{n\sqrt{n}}{n^3+n+1}$ konv. etter sammenliknings kriteriet da $0 < \frac{n\sqrt{n}}{n^3+n+1} < \frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{3/2}}$

og $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ konv. når $p > 1$

$\sum_1^\infty \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}+1}$ konv da $0 < \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}+1} < \left(\frac{1}{e}\right)^n$ (Geom. rekke)

$\sum_1^\infty e^{-\sqrt{n}}$ konv. etter integralkriteriet da

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\sqrt{R}} e^{-t}\, 2t\,dt$$

$$= 2\lim_{R\to\infty}\left[\Big|_0^{\sqrt{R}} -e^{-t}t + \int_0^{\sqrt{R}} e^{-t}\,dt\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\sqrt{R}}{e^{\sqrt{R}}} + 1 - e^{-\sqrt{R}}\right] = 1 < \infty$$

b) $$\sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Dermed: $$\frac{\sin x}{x} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_1^\infty \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

som gir

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

1b forts. Siden rekken for $1-\frac{\sin x}{x}$ er alternerende (for $0 < x \le 1$) er

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right| \le x^2 \quad (\text{når } 0 < x \le 1)$$

Dette gir (med $x = \frac{1}{n}$) at

$$\left|1 - n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \le \frac{1}{n^2}, \text{ så } \sum_{1}^{\infty}\left(1-n\sin\tfrac{1}{n}\right)$$

konv. etter sammenlikningskriteriet.

Alternativ løsn.: Bruk L'Hopitals regel til å vise at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t-\sin t}{t^3} = \frac{1}{6}$$

c) $(1+x)^r = \sum_{0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$ gir at

$$\sqrt{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^{3n}, \text{ der } \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

og $\binom{r}{0} = 1$

d) Vi finner $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{(\frac{1}{2})}{1}x^3 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}x^6 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}x^9 + \cdots$

Rekken blir alternerende for $0 < x \le \frac{1}{2}$ og

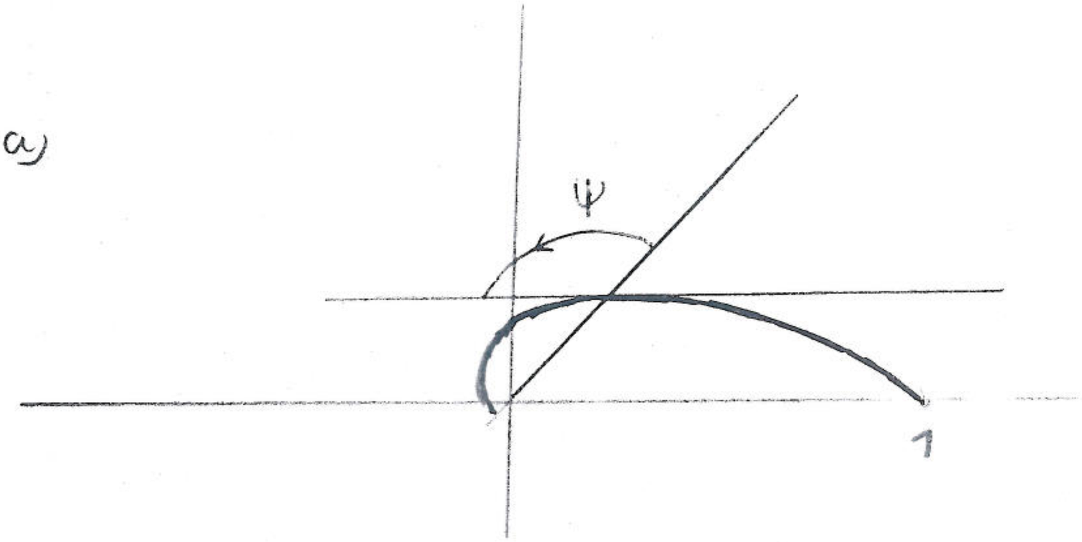
$$\left|\int_0^{1/2}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}x^6\right| = \frac{1}{56\cdot 2^7} < \frac{1}{1000}.$$ Altså

er $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^3}\,dx \approx \int_0^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^3)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{2^4}$

med feil $\le \frac{1}{1000}$

2)

a)



b) $A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-2\theta} \, d\theta = \frac{1}{2} \Big|_0^{\pi} -\frac{1}{2} e^{-2\theta} = \underline{\underline{\frac{1}{4} (1 - e^{-2\pi})}}$

c) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-2\theta} + (-e^{-\theta})^2} \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-2\theta}} \, d\theta$

$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\theta} \, d\theta = \underline{\underline{\sqrt{2} \, (1 - e^{-\frac{\pi}{2}})}}$

d) $\tan \psi = \dfrac{e^{-\theta}}{(e^{-\theta})'} = \dfrac{e^{-\theta}}{-e^{-\theta}} = -1$. Siden $0 \le \psi \le 1$, må $\psi = 135°$. For å få horisontal tangent må derfor $\theta = 45°$, eller $\theta = \frac{\pi}{4}$. P har polarkoordinatene (r, θ) der $r = e^{-\frac{\pi}{4}}$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$

3)

a) $\nabla g = \bar{\imath} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\bar{\jmath} + 2z\bar{k}$

Den retningsderiverte blir $\nabla g(P) \cdot \bar{u}$

$= (\bar{\imath} + \frac{1}{4}\bar{\jmath} + 4\bar{k}) \cdot (\frac{1}{2}\bar{\imath} + \frac{1}{2}\bar{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}) = \frac{5}{8} + 2\sqrt{2}$

b) $\nabla g(1,1,1) = \bar{\imath} + \frac{1}{2}\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ og

tangentplanet er gitt ved

$1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + 2(z-1) = 0$

c) Skal ha $(*)$ $x + \sqrt{y} + z^2 = 3$ og

$2x = \lambda$, $2y = \lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$ og $2z = \lambda 2z$

Siden $z > 0$ må $\lambda = 1$ og dermed må $x = \frac{1}{2}$ og $4y\sqrt{y} = 1$ slik at $y = (\frac{1}{4})^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = (\frac{1}{4})^{2/3}$. Dette gir $z^2 = 3 - x - \sqrt{y} = 3 - \frac{1}{2} - (\frac{1}{4})^{1/3}$

Den eneste mulige ekstremalverdien for f blir dermed

$x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{2})^2 + ((\frac{1}{4})^{2/3})^2 + 3 - \frac{1}{2} - (\frac{1}{4})^{1/3}$

$$= \underline{\underline{3 - \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^{4/3} - (\frac{1}{4})^{1/3}}}$$

4)

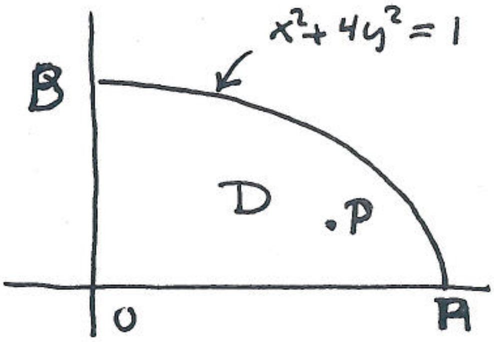
a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 1 = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 2x = 0$

Ved å addere likningene får vi $6y = 1$

Dermed er $y = \frac{1}{6}$ og $x = 4y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Vi har ett stasjonært punkt : $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$

b)



Vi skal finne max/min til f over D. Siden $(\frac{2}{3})^2 + 4(\frac{1}{6})^2 < 1$, ligger P i det indre av D. Vi har

$$f(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6}) = \frac{4}{9} + \frac{4}{36} - \frac{4}{18} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Drøfter f på randen

i) $f_1(x) = f(x,0) = x^2 - x \quad , 0 \le x \le 1$
$f_1' = 2x - 1 = 0$ for $x = \frac{1}{2}$. Mulige ekstrem-punkt : $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ og $(1,0)$
$f(0,0) = 0$, $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, $f(1,0) = 0$

ii) $f_2(y) = f(0,y) = 4y^2 \quad , 0 \le y \le \frac{1}{2}$. Vi ser at $f_2(y)$ vokser fra $f_2(0) = f(0,0) = 0$ til $f_2(\frac{1}{2}) = f(0,\frac{1}{2}) = 1$

4b forts.

På ellipsebuen fra A til B er

$f(x,y) = g(x,y) = 1 - 2xy - x$

Lagranges metode gir

$$-2y - 1 = \lambda\, 2x$$
$$-2x = \lambda\, 8y$$

som gir $-(2y+1)\,4y = -2x^2$

Siden $x^2 = 1 - 4y^2$, finner vi $-8y^2 - 4y = -2 + 8y^2$

eller $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{8} = 0$

eller $y = \dfrac{-1 \underset{(-)}{+} 3}{8}$, slik at $y = \frac{1}{4}$

Dermed blir $x = \sqrt{1 - 4y^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vi får ett nytt mulig ekstrempunkt: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} > \frac{-1}{3}$$

Alt i alt finner vi $\underline{\underline{f_{max} = 1}}$, $\underline{\underline{f_{min} = -\frac{1}{3}}}$

5

a) f kalles uniformt kont. på I hvis det til hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at når $x_1, x_2 \in I$ og $|x_1 - x_2| < \delta$, så vil $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

b) La $f(x) = \dfrac{1}{2+\sin x}$. Vi har

$$|f'(x)| = \left| \frac{-1}{(2+\sin x)^2} \cos x \right| \leq 1$$

siden $|\cos x| \leq 1$ og $|2+\sin x| \geq 1$.

c) (Kfr. Adams, oppg 7 side A 30)
La $\varepsilon = 1$ og velg δ i forhold til denne ε som i pkt a.
Del $(0,1)$ i N like (lange) intervaller $I_1, I_2, \dots I_N$ der hver I_N har lengde mindre enn δ.
La $x_1, x_2 \dots, x_N$ være midtpunktene i disse intervallene. Hvis $z \in I_k$ må $|f(x_k) - f(z)| \leq 1$. Altså må $|f| \leq f(x_k) + 1$ på I_k. $(1 \leq k \leq N)$
La $M = \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \dots, |f(x_N)|\}$.
Da er $|f| \leq M + 1$ på $(0,1)$