Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

EKSAMEN I EMNET MAT112-Grunnkurs i matematikk II

22 september 2008, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator .

Oppgave 1

(a) Avgjør om disse rekkene konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} cos\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+2}{n+2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$.

(b) Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-2^{-n}}$ konvergerer.

(c) Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^x}$ konvergerer for $x > 1$.

(d) Gitt potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Dersom rekken konvergerer for $x = b > 0$, kan du trekke noen slutning om rekkene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n 2^n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n b^n 2^{-n}$? Grunngi svaret.

Oppgave 2

(a) Skisser kurven $C_1 : r = 1 + cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ i xy-planet.

(b) Finn arealet avgrenset av kurven C_1 .

(c) Finn lengden av C_1. (Vink: For å finne lengden av C_1 kan du ha nytte av formelen $\sqrt{1 - cos(\theta)}\sqrt{1 + cos(\theta)} = sin(\theta)$ for $0 \leq \theta \leq \pi$.)

(d) En rett linje gjennom origo skjærer C_1 i to punkt P_1 og P_2 utenfor origo.. Vis at avstanden mellom P_1 og P_2 er lik 2.

Oppgave 3

La $g(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^3$

(a) Finn gradienten til g og finn den retningsderiverte til g i punktet P:(1,0,2) i retningen gitt ved $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

(b) Finn likningen for tangentplanet til flaten gitt ved

$$(*) : y^2 + z^2 - x^3 = 4$$

i punktet Q:(1,2,1).

(c) Finn alle punkt på flaten $y^2+z^2-x^3 = 4$ der tangentplanet er parallelt med xy-planet.

(d) Finn minimum av $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ når

$$(*) : y^2 + z^2 - x^3 = 4$$

Har denne verdien noen geometrisk tolkning?

Oppgave 4

(a) La $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}(y^2 - y)$. Finn alle kritiske (stasjonære) punkt til f.

(b) Finn største og minste verdi til f over området D gitt ved at $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq 0$.

(c) Vis at $f(x,y) \geq \frac{-1}{8}$ for alle verdier av x og y.

Oppgave 5

(a) Gi et eksempel på en diskontinuerlig funksjon definert på [0,1] som er Riemannintegrerbar på [0,1] .(Gi begrunnelse for ditt valg)

(b) La funksjonen f være definert på $(-\infty, \infty)$ og anta at det fins en konstant K slik at $|f'(x)| \leq K$ for alle x. Grunngi at da er f uniformt kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$. Er det mulig å finne en uniformt kontinuerlig funksjon g på [0,1] slik at $|g'|$ ikke er begrenset?

Arne Stray