Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

EKSAMEN I EMNET MAT112-Grunnkurs i matematikk II

13 juni 2008, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator.

Oppgave 1

(a) Avgjør om disse rekkene konvergerer eller divergerer: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-7}{4n^3+8}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-cos\frac{1}{n})^n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(b) Vis at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ konvergerer dersom $a_n = 1+2+....+n$..

(c) Vis at $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ for $|x| < 1$ og finn et enkelt uttrykk for $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

(d) Vis ved induksjon at $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ gjelder for n=1,2, .., og finn summen av rekken i pkt 1(b).

Oppgave 2

(a) Skisser kurven $C_1 : r = \sqrt{1+3sin\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

(b) Finn arealet avgrenset av kurven C_1 og x-aksen.

(c) Kurven $C_2 : r = \sqrt{10}sin\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$. skjærer C_1 for to verdier av θ, Finn disse verdiene og finn arealet av punktene som ligger innenfor C_2 og utenfor C_1 .

Oppgave 3

La $g(x,y,z) = 4x^2 - xyz - z^2$

(a) Finn gradienten til g og finn den retningsderiverte til g i punktet P:(1,0,2) i retningen gitt ved $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j} + \dfrac{1}{2}\vec{k}$

(b) Finn likningen for tangentplanet til flaten gitt ved

$$(*) : 4x^2 - xyz - z^2 = 29$$

i punktet Q:(3,2,1).

(c) Finn alle punkt på flaten $4x^2 - xyz - z^2 = 29$ der tangentplanet er parallellt med yz-planet. Vis og at det ikke fins noe punkt på flaten der tangentplanet er parallellt med xy-planet.

Oppgave 4

(a) La $f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2+xy}$. Finn de kritiske (stasjonære) punktene til f.

(b) Finn største og minste verdi til f over området D gitt ved at $x^2 + y^2 \leq 1$.

Oppgave 5

(a) Gi definisjonen av uniform kontinuitet for en funksjon f definert på et intervall I.

(b) La f være en uniformt kontinuerlig funksjon på (0,1]. Vis at om $\epsilon > 0$, så fins et punkt $a \in$ (0,1] slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ dersom $0 < x < a$. Vis og at f er begrenset på (0,1].

(c) Avgjør om $g(x) = \ln x$ er uniformt kontinuerlig på hvert av intervallene (0,1] , [1,2] og $[2, \infty)$

Per Manne

Arne Stray