Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bokmål

Eksamen i MAT112 - Grunnkurs i Matematikk II

Tirsdag 9. juni 2009, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Vedlagte formelsamling og kalkulator

Oppgåvesettet består av 5 oppgåver.

Oppgave 1

a) Avgjør om disse rekkene konvergerer/divergerer

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}; \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

b) Bruk binomialformelen til å finne en potensrekke for $\sqrt{1-x^2}$

c) Bruk at $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ og finn en tilnærming til π ved å benytte 4 ledd i rekken du fant i b)

Oppgave 2

La u, v, og w være vektorer i $\mathbf{R^3}$

a) Vis at

$$u \times (v+w) = u \times v + u \times w$$

b) Finn likningen for planet som går gjennom $P : (2, 1, -1)$ og som står normalt på skjæringslinjen mellom planene $2x + y - z = 3$ og $x + 2y + z = 2$

Oppgave 3

Fibonacci-følgen er gitt ved rekursjonen

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n; \qquad f_0 = f_1 = 1$$

a) Vis ved induksjon at $f_n < 2^n$ for $n \geq 1$ og at potensrekken $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ konvergerer for $|x| \leq \frac{1}{2}$

b) Vis at $(1 - x - x^2)F(x) = 1$ slik at

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

c) Bruk resultatet over til å finne potensrekker for

$$1)\ \frac{2x+1}{x^2+x-1}; \qquad \text{og} \qquad 2)\ \log(1-x-x^2)$$

Oppgave 4

Banen til en planet i omkrets om solen, er gitt ved differensialligningene

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial u} \qquad u'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$y'(t) = \frac{\partial H}{\partial v} \qquad v'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

der (x, y) er planetens posisjon, (u, v) er planetens hastighet i henholdsvis x- og y-retningen.

a) Størrelsen $H(x, y, u, v)$ er den totale energien til planeten. Dette er en konservert størrelse; det betyr at den ikke endrer seg med tiden. Vis at om H oppfyller likningsystemet ovenfor har vi

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t), u(t), v(t)) = 0$$

b) I vårt tilfelle er H gitt ved

$$H(x, y, u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Regn ut $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial H}{\partial u}$, og $\frac{\partial H}{\partial v}$.

c) Løsningen på ligningssettet blir som kjent en ellipseformet bane, der solen står i et av ellipsens brennpunkter. Vi innfører vår egen lengdeenhet og setter lengden til elipsens lengste halvakse til 5, banens eksentrisitet til $\epsilon = 0.6$, og plasserer solens brennpunkt i origo. Vis at likningen for planetens bane kan skrives

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

d) Vis at ellipsens likning i polare koordinater kan skrives som

$$r = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}$$

og vis at ellipsens omkrets blir

$$O = 2\int_0^{\pi} \frac{16}{5-3\cos\theta}\sqrt{1 + \frac{9\sin^2\theta}{(5-3\cos\theta)^2}}\,d\theta. \tag{1}$$

e) Uttrykket (1) kan ikke integreres eksakt, men hvis vi gjør en tilnærming ved å sette

$$\sqrt{1 + \frac{9\sin^2\theta}{(5 - 3\cos\theta)^2}} \approx \frac{5}{4}$$

og rekkeutvikler

$$\frac{16}{5 - 3\cos\theta}, \tag{2}$$

blir integrasjonen enkel. Utvikle (2) til tre ledd, utfør integrasjonen og finn et estimat for ellipsens omkrets basert på dette.

Oppgave 5

Vi vil lage en rettvinklet boks uten lokk som har størst mulig volum, men slik at den samlede overflaten av de 5 sideflatene er 1 m^2. Finn det maksimale volumet og formen på boksen i dette tilfellet.

Tor Sørevik Per Manne