Bokmål

Fasit Eksamen i MAT112, Våren 2009

Oppgave 1

a)

1. Vi har
$$\frac{1}{2n} \leq \frac{n+1}{n^2+3n},$$
så sammenligning med den harmoniske rekken $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ viser divergens.

2. Vi ser at vi har:

   i) Alternerende rekke

   ii) $|a_{n+1}| < |a_n|$

   iii) $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   Når både i), ii) og iii) er oppfyllt konvergerer den tilhørende rekken.

3. Brøktesten gir
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = 2/3.$$
som viser at rekken konvergerer.

b)

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \cdots$$

c)

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = 4\int_0^1 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6+\cdots dx = 4(1-1/6-1/40-1/112) =$$
$$3.197619047619048$$

Oppgave 2

La u, v, og w være vektorer i $\mathbf{R^3}$

a)

$$u\times(v+w) = (u_2(v_3+w_3)-u_3(v_2+w_2), u_3(v_1+w_1)-u_1(v_3+w_3), u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1)) =$$
$$(u_2v_3+u_2w_3-u_3v_2-u_3w_2, u_3v_1+u_3w_1-u_1v_3-u_1w_3, u_1v_2+u_1w_2-u_2v_1-u_2w_1) =$$
$$(u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)+(u_2w_3-u_3w_2, u_3w_1-u_1w_3, u_1w_2-u_2w_1) = u\times v+u\times w$$

b) De to planene har normalvektorer $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ og $\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Skjæringslinjen mellom planene står normalt på begge normalvektorene. Kryssproduktet blir derfor en retningsvektor for skjæringslinjen

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Ligningen for planet blir da

$$3(x-2) - 3(y-1) + 3(z+1) = 0$$

Oppgave 3

a) Sjekker at formelen gjelder for $n = 2$

$$f_2 = 2 < 4 = 2^2$$

Induksjonshypotesen: Anta

$$f_{n-1} < 2^{n-1}, \quad f_n < 2^n.$$

som gir

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} < 2^n + 2^{n-1} < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

og dermed følger det pr induksjon at $f_{n+1} < 2^{n+1}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n + 1}{f_n} < 2$$

gir konvergensradius $R = 1/L > 1/2$. M.a.o rekken konvergerer for $|x| \leq 1/2$.
(ps. Det går an å vise at $L = 2/(\sqrt{5} - 1)$. Konvergensradius er altså større enn det dere blir bedt om å vise)

b) Vi omformer summen. Underveis bruker vi at $f_0 = f_1 = 1$ og $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0;\ n \geq 2$ og skifter om på startpunktet for 2 av summene, mens vi justerer indeksen inni summen slik at summen blir uendret.

$$
\begin{aligned}
F(x)(1-x-x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(f_n x^n)(1-x-x^2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \\
&= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n - (f_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+1}) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \\
&= 1 + (f_0 - f_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n = 1
\end{aligned}
$$

c) 1)

$$
\frac{2x+1}{x^2+x-1} = -(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(2f_n x^{n+1} + f_n x^n) =
$$

$$
-1 - \sum_{n=1}^{\infty}(2f_{n-1} + f_n)x^n
$$

2) Vi observerer at

$$
\frac{d}{dx}\log(1-x-x^2) = \frac{2x+1}{x^2+x-1} = -(1+\sum_{n=1}^{\infty}(2f_{n-1}+f_n)x^n).
$$

Dermed er det bare å integrere:

$$
\log(1-x-x^2) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t-1}dt = -(x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2f_{n-1}+f_n}{n+1}x^{n+1}).
$$

Oppgave 4

a) Vi deriverer v.h.a. kjerneregelen og bruker differensialligningene

$$
\frac{d}{dt}H(x(t),y(t),u(t),v(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 0
$$

$$
\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial y} = 0
$$

b)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = u$$
$$\frac{\partial H}{\partial v} = v$$

c) Siden ellipsens store halvakse $a = 5$ og eksentrisiteten $\epsilon = 0.6$, må den lille halvaksen $b = 4$, og den halve avstanden mellom brennpunktene $c = 3$. Dette sees lett av formlene i vedlegget. Siden det ene brennpunktet står i origo, må sentrum stå i $(3,0)$ eller $(-3,0)$, og ligningen for ellipsen følger.

d) Vi setter $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, og regner i vei:

$$\frac{(r\cos\theta - 3)^2}{25} + \frac{r^2\sin^2\theta}{16} = 1.$$

Dette kan omformes til

$$r^2(\cos^2\theta/25 + (1-\cos^2\theta)/16) - r(6\cos\theta/25) - 16/25 = 0$$

Vi løser andregradslikingen i r:

$$r = \frac{6\cos\theta/25 \pm \sqrt{36\cos^2\theta/225 + 4(\cos^2\theta/25 + (1-\cos^2\theta)/16)\cdot 16/25}}{2(\cos^2\theta/25 + (1-\cos^2\theta)/16)}$$

$$r = \frac{6\cos\theta/25 \pm \sqrt{4/25}}{2(\cos^2\theta/25 + (1-\cos^2\theta)/16)}$$

$$r = \frac{6\cos\theta/25 \pm 2/5}{2(-9\cos^2\theta/(25\cdot 16) + 1/16))}$$

$$r = 8\frac{6\cos\theta/25 \pm 2/5}{(1 - 3^2\cos^2\theta/5^2)}$$

$$r = 16\frac{3\cos\theta \pm 5}{(5-3\cos\theta)(5+3\cos\theta)}$$

Siden $r \geq 0$ kan vi bare bruke (+) og vi får:

$$r = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}.$$

Vi deriverer

$$r' = \frac{-16 \cdot 3\sin\theta}{(5 - 3\cos\theta)^2}.$$

Siden ellipsen er symmetrisk om x-aksen nøyer vi oss med å integrere over halve ellipsen

$$O = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2}d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{16}{5 - 3\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{-16 \cdot 3\sin\theta}{(5 - 3\cos\theta)^2}\right)^2}d\theta =$$

$$2\int_0^\pi \frac{16}{5 - 3\cos\theta}\sqrt{1 + \frac{9\sin^2\theta}{(5 - 3\cos\theta)^2}}d\theta$$

e) Bruker MacLaurin rekken til $\frac{1}{1-x}$ med $x = 3/5\cos\theta$

$$\frac{16}{5 - 3\cos\theta} = \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{1 - 3/5\cos\theta} = \frac{16}{5}(1 + 3/5\cos\theta + 9/25\cos^2\theta + \cdots)$$

Da blir

$$\begin{aligned} O &= 2\int_0^\pi \frac{16}{5 - 3\cos\theta}\sqrt{1 + \frac{9\sin^2\theta}{(5 - 3\cos\theta)^2}}d\theta \\ &\approx 8\int_0^\pi 1 + 3/5\cos\theta + 9/25\cos^2\theta d\theta = \frac{236\pi}{25} \end{aligned}$$

(Integrasjonen blir enkel om en bruker: $\cos^2\theta = 1/2(\cos 2\theta + 1)$)

Oppgave 5

Volumet er

$$V = xyz.$$

Overflaten er

$$2(x + y)z + x \cdot y = 1.$$

Vi danner Lagrange funksjonen

$$L = xyz + \lambda(2(x + y)z + x \cdot y - 1),$$

partiell deriverer og krever $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, og $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$. Det gir

$$(i) \qquad yz + \lambda(2z + y) = 0$$

$$(ii) \qquad xz + \lambda(2z + x) = 0$$

$$(iii) \qquad xy + \lambda 2(x + y) = 0$$

og

$$(iv) \qquad 2(x + y)z + x \cdot y = 1$$

(iv) gir oss:

$$z = \frac{1 - xy}{2(x + y)}$$

og fra (iii) får vi:

$$\lambda = \frac{-xy}{2(x + y)},$$

og setter inn i (i) og (ii):

$$y\frac{1 - xy}{2(x + y)} + \frac{-xy}{2(x + y)}(2\frac{1 - xy}{2(x + y)} + y) = 0$$

$$x\frac{1 - xy}{2(x + y)} + \frac{-xy}{2(x + y)}(2\frac{1 - xy}{2(x + y)} + x) = 0.$$

Setter vi disse lik hverandre, får vi

$$x = y$$

enda en "revisjon" av (iv) gir

$$z = \frac{1 - x^2}{4x}.$$

Innsatt for y og z blir volumet

$$V = \frac{x - x^3}{4}.$$

Vi deriverer og setter lik null:

$$V' = \frac{1 - 3x^2}{4} = 0.$$

Negativ løsning er fysisk meningsløs og dessuten et minimumspunkt. Dette gir maksverdi for:

$$x = y = \sqrt{1/3}, \qquad z = \frac{1 - (\sqrt{1/3})^2}{4(\sqrt{1/3})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

og

$$V_{max} = V(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{3}}$$