Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bokmål

Eksamen i MAT112 - Grunnkurs i Matematikk II

Torsdag 10. juni 2010, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Vedlagte formelsamling og kalkulator

Oppgavesettet består av 5 oppgaver.

Oppgave 1

a) Avgjør om disse rekkene konvergerer / divergerer

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}}{(3n)!} \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

b) Finn konvergensintervalet og et enkelt utrykk for denne McLaurin-rekken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n\, n!} x^n$$

c) Vis at konvergensradiusen av denne rekken er $\frac{1}{3}$ og avgjør om den konvergerer eller divergerer på endepunktene av konvergensintervalet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$$

Oppgave 2

a) En ellipse er gitt ved likningen

$$3x^2 - 2x - 1 + 4y^2 = 0$$

Skriv likningen på standard form ($\frac{(x-d_1)^2}{a^2} + \frac{(y-d_2)^2}{b^2} = 1$) og bestem hvor brennpunktene ligger.

b) Skriv likningen i polar koordinater.

Oppgave 3

Gitt $f(x,y,z) = cos(x+2y+3z)$ og $P : (0, \pi, \frac{\pi}{2})$

a) Finn gradienten til f i P og den retningsderiverte i retningen $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ i dette punktet.

b) Hvilken geometrisk form har nivåflatene til f? Finn likningen for tangentplanet til nivåflaten til f i punktet P.

Oppgave 4

La x, y, z være sidene i en trekant med omkrets $2s = x + y + z$. Kvadratet av arealet til trekanten er da gitt ved Herons formel:

$$A(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z)$$

a) Bestemt et kritisk punkt for $A(x, y, z)$ med tilleggskravet $2s = x + y + z$.

b) Vis at dette er det globale maksimum for arealet av trekanten siden vi må ha $0 \leq x \leq s$, $0 \leq y \leq s$ og $0 \leq z \leq s$ for det praktiske problemet.

Oppgave 5

a) Vis at om en funksjon $f(x)$ er deriverbar i x_0, så er den også kontinuerlig i x_0.

b) Vis at det omvendt ikke nødvendigvis er sant: Dvs at om $f(x)$ er kontinuerlig i x_0, så er den ikke nødvendigvis deriverbar der.

c) Definer kontinuitet og deriverbarhet for en funksjon av to variabler $f(x, y)$.

d) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ er kontinuerlig i origo og de partiell deriverte eksisterer der. Vis at den ikke er deriverbar i $(0, 0)$.

Tor Sørevik　　　　Bjørn Ådlandsvik