BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Mandag 26. september 2011, kl. 09:00-14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1-8) og er sammensatt av 16 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (f.eks. teller oppgave 1(a) like mye som hele oppgave 6).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

OPPGAVE 1

Gitt funksjonen

$$f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

(a) Finn den retningsderiverte til f i retningen $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ i punktet $(x,y) = (1,1)$.

(b) Finn ligningen for tangentplanet til flaten $z = f(x,y)$ i punktet $(x,y,z) = (1,1,-1)$.

(c) Finn et uttrykk for skjæringslinjen mellom tangentplanet fra (b) og planet $x + y + z = 2$ (enten på parameterform eller standardform).

OPPGAVE 2

Kurven C er gitt ved parameterfremstillingen

$$x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

(a) Gi en grov skisse av kurven.

(b) Finn lengden av C.

(c) Kurven C kan også gis i polare koordinater på formen

$$r = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Finn $f(\theta)$ og regn ut arealet i første kvadrant avgrenset av C og koordinataksene.

OPPGAVE 3

Avgjør om rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(1/n)$ konvergerer absolutt eller betinget.

(Hint: Hva er $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$?)

OPPGAVE 4

(a) Finn konvergensintervallet til potensrekken

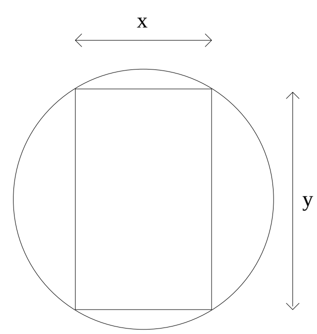
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)!}x^{n+3}.$$

(b) La $f(x)$ være summen av rekken i (a) for alle x i konvergensintervallet. Finn en potensrekkeutvikling for $f'(x)$ og vis at $f'(x) = x^2e^{-x}$.

(c) Finn et enkelt uttrykk for $f(x)$. Er potensrekken fra (a) lik Maclaurinrekken til f?

OPPGAVE 5

Av en sylinderformet stokk med radius r skal det skjæres ut en bjelke med bredde x og høyde y, som vist på figuren.



Bæreevnen til bjelken er proporsjonal med x og kvadratet av y. Vi ønsker å finne de verdiene av x og y som gir størst bæreevne.

(a) Begrunn kort hvorfor problemet over leder til problemet:

Finn de verdiene av x og y som maksimérer funksjonen $f(x,y) = kxy^2$ (der k er en konstant) når $x^2 + y^2 = 4r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

og begrunn også *matematisk* hvorfor vi vet at dette problemet har en løsning.

(b) Løs problemet, dvs. finn de verdiene av x og y som gir størst bæreevne.

OPPGAVE 6

La f være en voksende (reell) funksjon på $[0,1]$ og P_n være partisjonen av $[0,1]$ i n delintervaller av lik lengde. Vis at

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{f(1)-f(0)}{n}.$$

Må f være Riemannintegrérbar på $[0,1]$?

OPPGAVE 7

Avgjør om funksjonen $f(x) = x \ln x$ er uniformt kontinuerlig på intervallene $(0,1)$ og $[1,\infty)$.
(Du kan enten bruke definisjonen eller vise til generelle resultater om uniform kontinuitet fra pensum.)

OPPGAVE 8

(a) Formulér kompletthetsaksiomet for de reelle tallene og bruk dette til å bevise at en avtagende følge av reelle tall som er nedtil begrenset er konvergent.

(b) Kristine har et akvarium der vannet har blitt for hardt, dvs. at konsentrasjonen av salter (som er massen av salt per volumenhet og blir målt i gram per liter) er for stor. La c_0 være denne konsentrasjonen. Av hensyn til fiskene og plantene i akvariet kan ikke Kristine bytte alt vannet på én gang, men må nøye seg med å bytte S liter én gang i uken. Dette gjør hun ved å tappe S liter fra akvariet og erstatte det med S liter vann fra springen. Vi ser bort fra fordampning o.l.

Vi lar c_n være konsentrasjonen av salter etter n uker, K være konsentrasjonen av salter i vannet i springen og V være det totale volumet av vannet i akvariet målt i liter. (Vi kan anta at $0 < S < V$ og $0 < K < c_0$.)

Begrunn kort at c_n tilfredsstiller rekursjonsformelen

$$c_n = \left(1 - \frac{S}{V}\right)c_{n-1} + \frac{S}{V}K,$$

og bruk denne til å finne ut hva som skjer med konsentrasjonen av salter c_n etter hvert som tiden går.

LYKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen

NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Mandag 26. september 2011, kl. 09:00-14:00

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.

Oppgåvesettet er på 3 sider (med oppgåvene 1-8) og er samansett av 16 deloppgåver som alle tel likt ved sensurering (til dømes tel oppgåve 1(a) like mykje som heile oppgåve 6).

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Alle svar skal grunngjevast, men grunngjevingane skal vere korte. Det må vere med nok mellomrekning til at framgangsmåten går tydeleg fram av det du skriv. Det vert gjeve godt med poeng for riktig framgangsmåte, sjølv om du ikkje kjem fram til korrekt svar.

OPPGÅVE 1

Gjeve funksjonen

$$f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

(a) Finn den retningsderiverte til f i retninga $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ i punktet $(x,y) = (1,1)$.

(b) Finn likninga for tangentplanet til flata $z = f(x,y)$ i punktet $(x,y,z) = (1,1,-1)$.

(c) Finn eit uttrykk for skjeringslinja mellom tangentplanet frå (b) og planet $x + y + z = 2$ (anten på parameterform eller standardform).

OPPGÅVE 2

Kurva C er gjeve ved parameterframstellinga

$$x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

(a) Gjev ei grov skisse av kurva.

(b) Finn lengda av C.

(c) Kurva C kan òg gjevast i polare koordinatar på forma

$$r = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Finn $f(\theta)$ og rekn ut arealet i første kvadrant avgrensa av C og koordinataksane.

OPPGÅVE 3

Avgjer om rekkja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(1/n)$ konvergerer absolutt eller betinga.

(Hint: Kva er $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$?)

OPPGÅVE 4

(a) Finn konvergensintervallet til potensrekkja

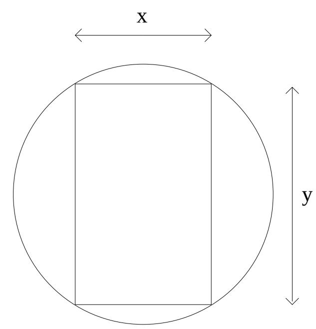
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)!}x^{n+3}.$$

(b) La $f(x)$ vere summen av rekkja i (a) for alle x i konvergensintervallet. Finn ei potensrekkjeutvikling for $f'(x)$ og syn at $f'(x) = x^2e^{-x}$.

(c) Finn eit enkelt uttrykk for $f(x)$. Er potensrekkja frå (a) lik Maclaurinrekkja til f?

OPPGÅVE 5

Av ein sylinderforma stokk med radius r skal det skjerast ut ei bjelke med bredde x og høyde y, som vist på figuren.



Bereevna til bjelka er proporsjonal med x og kvadratet av y. Vi ynskjer å finne dei verdiane av x og y som gjev størst bereevne.

(a) Grunngjev kort kvifor problemet over leier til problemet:

Finn dei verdiane av x og y som maksimérer funksjonen $f(x,y) = kxy^2$ (der k er ein konstant) når $x^2 + y^2 = 4r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

og grunngjev òg *matematisk* kvifor vi veit at dette problemet har ei løysing.

(b) Løys problemet, dvs. finn dei verdiane av x og y som gjev størst bereevne.

OPPGÅVE 6

La f vere ein veksande (reell) funksjon på $[0,1]$ og P_n vere partisjonen av $[0,1]$ i n delintervall av lik lengd. Syn at

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{f(1)-f(0)}{n}.$$

Må f vere Riemannintegrérbar på $[0,1]$?

OPPGÅVE 7

Avgjer om funksjonen $f(x) = x\ln x$ er uniformt kontinuerleg på intervalla $(0,1)$ og $[1,\infty)$.
(Du kan anten nytte definisjonen eller vise til generelle resultat om uniform kontinuitet frå pensum.)

OPPGÅVE 8

(a) Formulér aksiomet som seier at dei reelle tala er komplette ("kompletthetsaksiomet") og nytt dette til å prove at ein avtakande følgje av reelle tal som er nedtil avgrensa er konvergent.

(b) Kristine har eit akvarium der vatnet har vorte for hardt, dvs. at konsentrasjonen av saltar (som er massen av salt per volumeining og vert måla i gram per liter) er for stor. Lèt c_0 vere denne konsentrasjonen. Av omsyn til fiskane og plantane i akvariet kan ikkje Kristine byte alt vatnet på ein gong, men må nøye seg med å byte S liter ein gong i veka. Dette gjer ho ved å tappe S liter frå akvariet og erstatte det med S liter vatn frå springen. Vi ser bort frå fordamping o.l.

Vi lèt c_n vere konsentrasjonen av saltar etter n veker, K vere konsentrasjonen av saltar i vatnet i springen og V vere det totale volumet av vatnet i akvariet målt i liter. (Vi kan gå ut frå at $0 < S < V$ og $0 < K < c_0$.)

Grunngjev kort at c_n tilfredssteller rekursjonsformelen

$$c_n = \left(1 - \frac{S}{V}\right)c_{n-1} + \frac{S}{V}K,$$

og nytt denne til å finne ut kva som skjer med konsentrasjonen av saltar c_n etter kvart som tida går.

LUKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen

English translation of Exam in MAT112 – Autumn 2011

Please note that the following translation for the examination in MAT112 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: calculator according to the faculty rules.

The problem set consists of 3 pages (with problems 1-8) and consists of 16 subproblems that all count equally (for instance: problem 1(a) counts as much as the whole problem 6).

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Points will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

PROBLEM 1

Given the function

$$f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

(a) Find the directional derivative of f in the direction $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ in the point $(x, y) = (1, 1)$.
(b) Find the equation for the tangent plane to the surface $z = f(x, y)$ in the point $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.
(c) Find an expression for the line of intersection of the tangent plane from (b) and the plane $x + y + z = 2$ (either in parameter form or in standard form).

PROBLEM 2

The curve C is given by the parametric equations

$$x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

(a) Make a rough sketch of the curve.
(b) Find the length of C.
(c) The curve C may also be given in polar coordinates in the form

$$r = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Find $f(\theta)$ and compute the area in the first quadrant bounded by C and the coordinate axes.

PROBLEM 3

Determine whether the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(1/n)$ converges absolutely or conditionally.

(Hint: What is $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$?)

PROBLEM 4

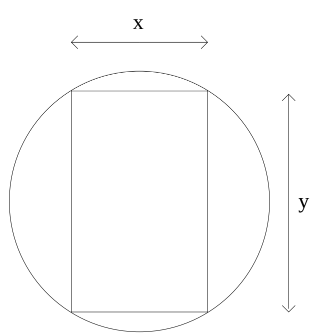
(a) Find the interval of convergence of the power series
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)!}x^{n+3}.$$

(b) Let $f(x)$ denote the sum of the series in (a) for all x in the interval of convergence. Find a power series representation for $f'(x)$ and show that $f'(x) = x^2e^{-x}$.

(c) Find a simple expression for $f(x)$. Is the power series from (a) equal to the Maclaurin series of f?

PROBLEM 5

A beam of width x and height y should be cut out from a stick formed as a sylinder with radius r, as shown in the figure.



The load-carrying capacity of the beam is proportional to x and the square of y. We would like to find the values of x and y that yield the largest carrying capacity.

(a) Justify briefly why the problem above leads to the problem:

Find the values of x and y that maximize the function $f(x,y) = kxy^2$ (where k is a constant) when $x^2 + y^2 = 4r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,

and also justify *mathematically* why we know that this problem has a solution.

(b) Solve the problem, that is, find the values of x and y that yield the largest carrying capacity.

PROBLEM 6

Let f be an increasing (real valued) function on $[0,1]$ and P_n be the partition of $[0,1]$ in n subintervals of equal length. Show that
$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{f(1)-f(0)}{n}.$$
Does f need to be Riemann integrable on $[0,1]$?

PROBLEM 7

Determine whether the function $f(x) = x\ln x$ is uniformly continuous on the intervals $(0,1)$ and $[1,\infty)$.

(You may use the definition or refer to general results about uniform continuity from our syllabus.)

PROBLEM 8

(a) Formulate the completeness axiom for the real numbers and use this to prove that a decreasing sequence of real numbers that is bounded below is convergent.

(b) Kristine has an aquarium where the water has become too hard, that is, the concentration of minerals (which is the mass of minerals per volume unit and is measured in grams per liter) is too high. Let c_0 be this concentration. Kristine cannot change all the water at the same time, for the sake of the fishes and plants in the aquarium. She therefore has to limit herself to changing only S liters once a week. She does this by draining S liters from the aquarium and replace it by S liters of tap water. We ignore factors such as evaporation etc.

We let c_n denote the concentration of minerals after n weeks, K denote the concentration of minerals in the tap water and V denote the total volume of water in the aquarium measured in liters. (We may assume that $0 < S < V$ and $0 < K < c_0$.)

Justify briefly that c_n satisfies the recursive formula

$$c_n = \Big(1 - \frac{S}{V}\Big)c_{n-1} + \frac{S}{V}K,$$

and use this to find out what happens to the concentration of minerals as time goes on.

GOOD LUCK!

Andreas Leopold Knutsen