BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Torsdag 9. juni 2011, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1-9) og er sammensatt av 17 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (f.eks. teller oppgave 1(a) like mye som hele oppgave 8).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

OPPGAVE 1

Gitt følgen $\{a_n\}$ definert rekursivt ved

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

(a) Vis (for eksempel ved induksjon) at $\{a_n\}$ er strengt avtagende og nedtil begrenset.
(b) Avgjør om følgen $\{a_n\}$ konvergerer og finn eventuelt grensen.

OPPGAVE 2

(a) Avgjør om rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ konvergerer.
(b) Avgjør om rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\big(3 + (-1)^n\big)n}$ konvergerer absolutt.

Du er på MAT112-eksamensfest og en medstudent forteller fornøyd om sitt svar på spørsmålet om denne rekken konvergerer betinget:

"Rekken er alternerende, siden to påfølgende ledd alltid har motsatt fortegn, og absoluttverdien av leddene går mot null. Derfor konvergerer rekken ved alternerende rekkers test."

Du har alltid vært en festbrems og finner en feil i resonnementet. Hva er feilen? Hva er *ditt* svar på om rekken konvergerer betinget?

OPPGAVE 3

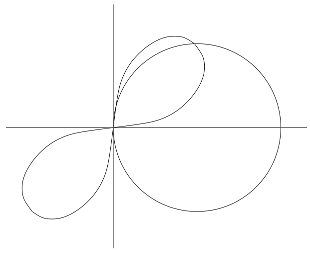
Gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n.$$

(a) Finn konvergensintervallet til rekken.
(b) Finn et enkelt uttrykk for summen av rekken i det indre av konvergensintervallet. Kommentér også kort hva som skjer i eventuelle endepunkter.

OPPGAVE 4

Gitt de polare kurvene $r = 2\cos\theta$ og $r^2 = 2\sin(2\theta)$. De er tegnet inn i figuren under.



(a) I tillegg til i origo, snitter kurvene hverandre i ett punkt, som ligger i første kvadrant. Finn dette punktet (uttrykt ved polare koordinater).

(b) Uttrykk arealet av området som ligger samtidig innenfor begge kurvene som et bestemt integral eller sum av slike. Du skal ikke regne ut verdien av integralet. (Om du i (a) ikke klarte å regne ut snittpunktet, kall dette punktet (r_0, θ_0) og gi integralet ved hjelp av θ_0.)

OPPGAVE 5

Funksjonen $T(x, y) = 1 + 2x + 12y - x^2 - 2y^2$ gir en temperaturfordeling i xy-planet.

(a) Hva vet vi om temperaturen i planet langs en nivåkurve til T?
Hvilken type kurver er nivåkurvene til T? (Hint: fullfør kvadratet og finn ut hvilken type kjeglesnitt kurvene er og hva sentrum er.)

(b) I hvilken retning fra $(0, 0)$ øker funksjonen T mest og hva er den retningsderiverte i denne retningen?

(c) En varmesøkende partikkel beveger seg i planet gjennom origo og følger hele tiden den retningen der temperaturen øker mest. Finn en ligning for kurven som beskriver banen.
Hvordan krysser denne kurven nivåkurvene til T? (Dette kan du svare på selv om du ikke har klart å finne ligningen for kurven.)

OPPGAVE 6

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = 2x + y + \frac{500}{xy}; \quad x > 0, \; y > 0.$$

(a) Finn de partiellderiverte til f med hensyn på x og y og vis at $(5, 10)$ er det eneste kritiske (stasjonære) punktet til f. Regn også ut funksjonsverdien i $(5, 10)$.

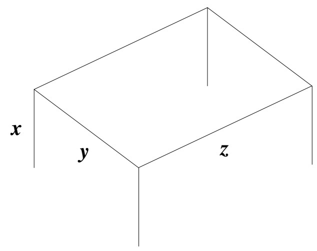
(b) Begrunn (kort) at f har globale (absolutte) ekstremalverdier hvis vi gir den definisjonsmengden

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \leq 15, \; y \leq 30, \; xy \geq 10\right\}.$$

Vis også at $f(x, y) > 30$ på randen av D og utenfor D (når $x, y > 0$).

(c) Du skal på telttur og skal lage en ramme av stålrør som skal brukes som reisverk til et telt. Rammen er satt sammen av fire ben med lengde x festet til et rektangel med sider y og z, som vist i figuren under. Volumet $V = xyz$ av teltet skal være 500m^3.

Finn de dimensjonene av teltet x, y, z som gjør at den totale lengden av stålrør som går med er minst mulig. Du får bruk for (a) og (b).



OPPGAVE 7

Avgjør om funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2+y^2} & \text{når } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{når } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

er kontinuerlig i origo. Er f derivérbar i origo?

OPPGAVE 8

Avgjør om funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ er uniformt kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$.
(Du kan enten benytte definisjonen eller vise til generelle resultater om uniform kontinuitet fra pensum.)

OPPGAVE 9

La f være en (reell) funksjon (av én reell variabel) som er kontinuerlig på $(0,1)$ og begrenset på $[0,1]$. Vis at f er Riemannintegrérbar på $[0,1]$.

LYKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen   Torleif Veen   Trygve Johnsen

NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Torsdag 9. juni 2011, kl. 09-14

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.

Oppgåvesettet er på 3 sider (med oppgåvene 1-9) og er samansett av 17 deloppgåver som alle tel likt ved sensurering (til dømes tel oppgåve 1(a) like mykje som heile oppgåve 8).

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Alle svar skal grunngjevast, men grunngjevingane skal vere korte. Det må vere med nok mellomrekning til at framgangsmåten går tydeleg fram av det du skriv. Det vert gjeve godt med poeng for riktig framgangsmåte, sjølv om du ikkje kjem fram til korrekt svar.

OPPGÅVE 1

Gjeve følgja $\{a_n\}$ definert rekursivt ved

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

(a) Syn (til dømes ved induksjon) at $\{a_n\}$ er strengt avtakande og nedtil avgrensa.

(b) Avgjer om følgja $\{a_n\}$ konvergerer og finn eventuelt grensa.

OPPGÅVE 2

(a) Avgjer om rekkja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ konvergerer.

(b) Avgjer om rekkja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\Big(3 + (-1)^n\Big)n}$ konvergerer absolutt.

Du er på MAT112-eksamensfest og ein medstudent fortel nøgd om sitt svar på spørsmålet om denne rekkja konvergerer betinga:

“Rekkja er alternerande, sidan to påfølgjande ledd alltid har motsett forteikn, og absoluttverdien av ledda går mot null. Difor konvergerer rekkja ved alternerande rekkjers test.”

Du har alltid vore ein festbrems og finn ein ein feil i resonnementet. Kva er feilen? Kva er *ditt* svar på om rekkja konvergerer betinga?

OPPGÅVE 3

Gjeve rekkja

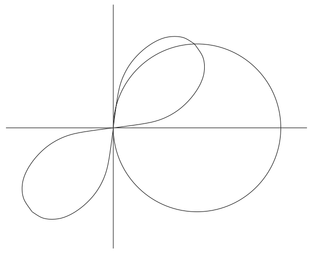
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n.$$

(a) Finn konvergensintervallet til rekkja.

(b) Finn eit enkelt uttrykk for summen av rekkja i det indre av konvergensintervallet. Kommentér òg kort kva som skjer i eventuelle endepunkt.

OPPGÅVE 4

Gjeve dei polare kurvene $r = 2\cos\theta$ og $r^2 = 2\sin(2\theta)$. Dei er teikna inn i figuren under.



(a) I tillegg til i origo, snitter kurvene kvarandre i eitt punkt, som ligg i fyrste kvadrant. Finn dette punktet (uttrykt ved polare koordinatar).

(b) Uttrykk arealet av området som ligg samstundes innanfor båe kurvene som eit bestemt integral eller sum av slike. Du skal ikkje rekne ut verdien av integralet. (Om du i (a) ikkje klarte å rekne ut snittpunktet, kall dette punktet (r_0, θ_0) og gje integralet ved hjelp av θ_0.)

OPPGÅVE 5

Funksjonen $T(x, y) = 1 + 2x + 12y - x^2 - 2y^2$ gjev ei temperaturfordeling i xy-planet.

(a) Kva veit vi om temperaturen i planet langs ei nivåkurve til T?

Kva type kurver er nivåkurvene til T? (Hint: fullfør kvadratet og finn ut kva type kjeglesnitt kurvene er og kva sentrum er.)

(b) I kva for ei retning frå $(0, 0)$ aukar funksjonen T mest og kva er den retningsderiverte i denne retninga?

(c) Ein varmesøkjande partikkel rører seg i planet gjennom origo og følgjer heile tida den retninga der temperaturen auker mest. Finn ei likning for kurva som skildrar banen.

Korleis krysser denne kurva nivåkurvene til T? (Dette kan du svara på sjølv om du ikkje har klart å finne likninga for kurva.)

OPPGÅVE 6

Gjeve funksjonen

$$f(x, y) = 2x + y + \frac{500}{xy}; \quad x > 0,\ y > 0.$$

(a) Finn dei partiellderiverte til f med omsyn på x og y og syn at $(5, 10)$ er det einaste kritiske (stasjonære) punktet til f. Rekn òg ut funksjonsverdien i $(5, 10)$.

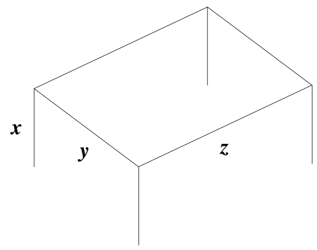
(b) Grunngje (kort) at f har globale (absolutte) ekstremalverdiar viss vi gjev han definisjonsmengda

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 15,\ y \leq 30,\ xy \geq 10\Big\}.$$

Vis óg at $f(x, y) > 30$ på randa av D og utanfor D (når $x, y > 0$).

(c) Du skal på telttur og skal lage ei ramme av stålrøyr som skal nyttast som reisverk til eit telt. Ramma er satt saman av fire bein med lengd x festa til eit rektangel med sider y og z, som vist i figuren under. Volumet $V = xyz$ av teltet skal vere 500m^3.

Finn dei dimensjonane av teltet x, y, z som gjer at den totale lengda av stålrøyr som går med er minst mogleg. Du får bruk for (a) og (b).



OPPGÅVE 7

Avgjer om funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2+y^2} & \text{når } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{når } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

er kontinuerleg i origo. Er f derivérbar i origo?

OPPGÅVE 8

Avgjer om funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ er uniformt kontinuerleg på intervallet $[0, \infty)$.
(Du kan anten nytte definisjonen eller vise til generelle resultat om uniform kontinuitet frå pensum.)

OPPGÅVE 9

La f vere ein (reell) funksjon (av ein reell variabel) som er kontinuerleg på $(0, 1)$ og avgrensa på $[0, 1]$. Syn at f er Riemannintegrérbar på $[0, 1]$.

LUKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen — Torleif Veen — Trygve Johnsen

English translation of Exam in MAT112 – Spring 2011

Warning: The following translation for the examination in MAT112 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: calculator subject to the rules of the faculty.

The problem set consists of 3 pages (with problems 1-9) and consists of 17 subproblems that all count equally (for instance: problem 1(a) counts as much as the whole problem 8).

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Points will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

PROBLEM 1

Given the sequence $\{a_n\}$ defined recursively by

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

(a) Show (for instance by induction) that $\{a_n\}$ is strictly decreasing and bounded below.
(b) Determine whether the sequence $\{a_n\}$ converges and, if so, find the limit.

PROBLEM 2

(a) Determine whether the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ converges.
(b) Determine whether the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\big(3+(-1)^n\big)n}$ converges absolutely.

You are at the exam party of MAT112 and a fellow student explains happily his answer to the question of whether this series converges conditionally:

"The series is alternating, since any two consecutive terms have opposite signs, and the absolute value of the terms tend to zero. Therefore, the series will converge by the alternating series' test."

You have always been a party spoiler and find a mistake in the reasoning. What is the mistake?

What is *your* answer to whether the series converges conditionally?

PROBLEM 3

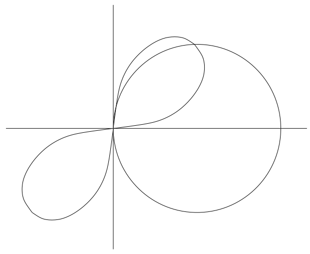
Given the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n.$$

(a) Find the interval of convergence of the series.
(b) Find a simple expression for the sum of the series in the interior of the interval of convergence. Also briefly comment upon what happens in possible end points.

PROBLEM 4

Given the polar curves $r = 2\cos\theta$ and $r^2 = 2\sin(2\theta)$. They are drawn in the figure below.



(a) In addition to in the origin, the curves intersect in one point, which lies in the first quadrant. Find this point (expressed in polar coordinates).
(b) Express the area lying simultaneously inside both curves as a definite integral or sum of such. You must not find the value of the integral. (If you did not manage to find the intersection point in (a), call it (r_0, θ_0) and express the integral in terms of θ_0.)

PROBLEM 5

The function $T(x, y) = 1 + 2x + 12y - x^2 - 2y^2$ describes a distribution of temperature in the plane.

(a) What do we know about the temperature in the plane along a level curve of T?
What types of curves are the level curves of T? (Hint: complete the square and find out what kind of conic sections the curves are and what the center is.)
(b) In which direction from $(0, 0)$ does the function T increase most rapidly in value and what is the directional derivative in this direction?
(c) A heat seeking particle moves in the plane through the origin and always follows the direction in which the temperature increases most rapidly. Find an equation for the curve that describes the path.
How does this curve intersect the level curves of T? (You can answer this question even if you did not manage to find the equation for the curve.)

PROBLEM 6

Given the function

$$f(x, y) = 2x + y + \frac{500}{xy}; \quad x > 0,\ y > 0.$$

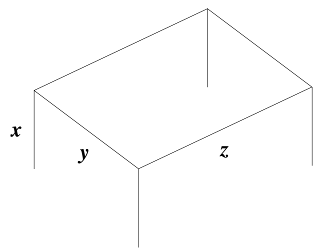
(a) Find the partial derivatives of f with respect to x and y and show that $(5, 10)$ is the only critical (stationary) point of f. Also compute the value of the function in $(5, 10)$.
(b) Justify (briefly) that f has global (absolute) extremal values if we give it the domain of definition

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \leq 15,\ y \leq 30,\ xy \geq 10\Big\}.$$

Also show that $f(x, y) > 30$ on the border of D and outside D (when $x, y > 0$).

(c) You are going on a camping trip and have to make a frame of steel tubes that will be used as a frame for a tent. The frame is made of four legs of length x joined to a rectangle with sides y and z, as shown in the figure below. The volume $V = xyz$ of the tent should be 500m^3.

Find the measures of the tent x, y, z that make the total length of the steel tubes as small as possible. You will need (a) and (b).



PROBLEM 7

Determine whether the function

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2+y^2} & \text{when } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{when } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

is continuous in the origin. Is f differentiable in the origin?

PROBLEM 8

Determine whether the function $f(x) = \sqrt{x}$ is uniformly continuous in the interval $[0, \infty)$. (You may use the definition or refer to general results about uniform continuity from our syllabus.)

PROBLEM 9

Let f be a (real valued) function (of one real variable) that is continuous on $(0, 1)$ and bounded on $[0, 1]$. Show that f is Riemann integrable on $[0, 1]$.

GOOD LUCK!

Andreas Leopold Knutsen   Torleif Veen   Trygve Johnsen