BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Mandag 24. september 2012, kl. 09:00-14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1-8) og er sammensatt av 16 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (f.eks. teller oppgave 1(a) like mye som hele oppgave 6).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

OPPGAVE 1

La $f(x, y) = 40 - 2x^2 + y^2$.

(a) Finn den retningsderiverte til f i punktet $(-2, 1)$ i retningen gitt ved vektoren $\mathbf{v} = (3, -4)$.

(b) I hvilken retning øker f mest i punktet $(-2, 1)$? Hvor stor er den retningsderiverte i denne retningen?

(c) Finn ligningen for tangentlinjen til den plane kurven gitt ved

$$f(x, y) = 0$$

i et vilkårlig punkt (a, b) på kurven.

OPPGAVE 2

Gitt den parametriserte kurven

$$x(t) = 3t^2 + 1, \;\; y(t) = t^3 - 3t.$$

(a) Finn alle punkter på kurven der tangenten er horisontal.

(b) Finn buelengden av kurven mellom $t = 0$ og $t = 3$.

OPPGAVE 3

Gitt funksjonen

$$g(x, y) = x^2 - 4xy,$$

med definisjonsmengde

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4, \; 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}.$$

(a) Skissér området D i planet og begrunn hvorfor g oppnår global maksimums- og minimumsverdi på definisjonsmengden D.

(b) Finn største og minste verdi til g når $(x, y) \in D$.

OPPGAVE 4

(a) La $a > 0$ og $l > 0$ være positive konstanter. Finn ligningene i kartesiske koordinater til de to polare kurvene gitt ved

$$r = a, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

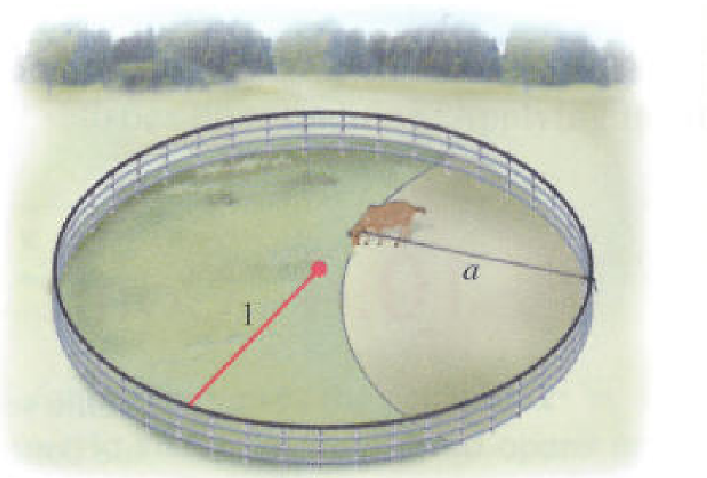
og

$$r = 2l\cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

og vis at de er sirkler med sentrum i $(0,0)$ og $(l,0)$ og radius a og l, henholdsvis.

(b) Bruk (a) til å løse følgende problem: En geit er festet til et tau av lengde a på innsiden av et sirkulært inngjerdet område av radius $l > a$, som vist på figuren under. Hva er det totale arealet (på innsiden av gjerdet) geiten kan beite i?

Du vil trolig få bruk for formelen $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$.



OPPGAVE 5

La $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Vis at funksjonen

$$f_n(x) = x^3 + nx - 1$$

har nøyaktig ett nullpunkt og at dette ligger i intervallet $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. (Hint: bruk skjæringssetningen ("Intermediate Value Theorem"), sekantsetningen ("Mean Value Theorem") og/eller funksjonsdrøfting.)

(b) Kall nullpunktet for a_n. Vis at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ og } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

(c) Bruk opplysningene over til å finne konvergensintervallet til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

(d) La $f(x)$ være summen av rekken i (a) når x ligger i konvergensintervallet. Vis at

$$\lim_{x\to 1^-} \int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

OPPGAVE 6

La

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2} & \text{når } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{når } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Finn de partiellderiverte til f i origo og avgjør om f er derivérbar i origo.

OPPGAVE 7

Gi et eksempel på en funksjon som er *kontinuerlig* men ikke *uniformt kontinuerlig* på intervallet $(0,1)$. Husk å begrunne svaret. (Du kan enten nytte definisjonen eller vise til generelle resultat fra pensum.)

OPPGAVE 8

La $\{x_n\}$ være en strengt avtagende følge slik at $0 < x_n < 1$ for alle $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Definér funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x = x_n,\ n = 1,2,3,4,\ldots, \\ 0 & \text{ellers, } x \in [0,1] \end{cases}$$

på $[0,1]$.

Avgjør om f er Riemannintegrérbar på intervallet $[0,1]$, og beregn i så fall $\int_0^1 f(x)\, dx$.

LYKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen

NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Måndag 24. september 2012, kl. 09:00-14:00

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.

Oppgåvesettet er på 3 sider (med oppgåvene 1-8) og er samansett av 16 deloppgåver som alle tel likt ved sensurering (til dømes tel oppgåve 1(a) like mykje som heile oppgåve 6).

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Alle svar skal grunngjevast, men grunngjevingane skal vere korte. Det må vere med nok mellomrekning til at framgangsmåten går tydeleg fram av det du skriv. Det vert gjeve godt med poeng for riktig framgangsmåte, sjølv om du ikkje kjem fram til korrekt svar.

OPPGÅVE 1

La $f(x, y) = 40 - 2x^2 + y^2$.

(a) Finn den retningsderiverte til f i punktet $(-2, 1)$ i retninga gjeve ved vektoren $\mathbf{v} = (3, -4)$.

(b) I kva retning auker f mest i punktet $(-2, 1)$? Kor stor er den retningsderiverte i denne retninga?

(c) Finn likninga for tangentlinja til den plane kurva gjeven ved

$$f(x, y) = 0$$

i eit vilkårleg punkt (a, b) på kurva.

OPPGÅVE 2

Ei parametrisert kurve er gjeven ved

$$x(t) = 3t^2 + 1, \quad y(t) = t^3 - 3t.$$

(a) Finn alle punkt på kurva der tangenten er horisontal.

(b) Finn bogelengda av kurva mellom $t = 0$ og $t = 3$.

OPPGÅVE 3

Ein funksjon g er gjeven ved

$$g(x, y) = x^2 - 4xy,$$

med definisjonsmengd

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$

(a) Skissér området D i planet og grunnje kvifor g oppnår global maksimums- og minimumsverdi på definisjonsmengda D.

(b) Finn største og minste verdi til g når $(x, y) \in D$.

OPPGÅVE 4

(a) La $a > 0$ og $l > 0$ vere positive konstantar. Finn likningene i kartesiske koordinatar til dei to polare kurvene gjevne ved

$$r = a, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

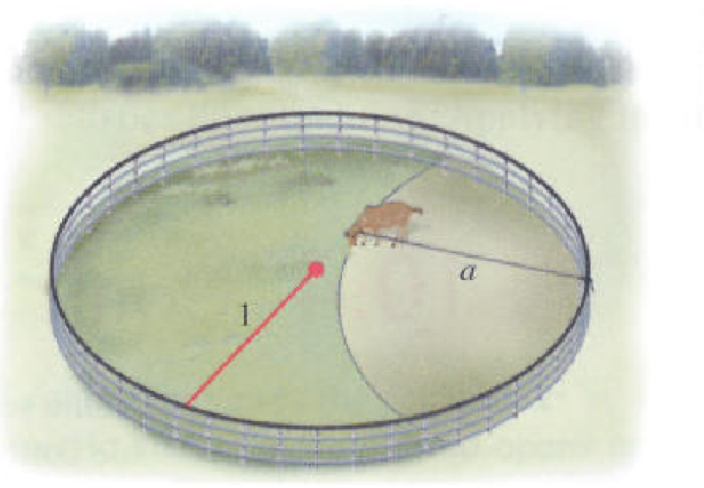
og

$$r = 2l\cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

og syn at dei er sirklar med sentrum i $(0, 0)$ og $(l, 0)$ og radius a og l, høvesvis.

(b) Nytt (a) til å løyse følgjande problem: Ei geit er festa til eit tau av lengd a på innsida av eit sirkulært inngjerda område av radius $l > a$, som synt på figuren under. Kva er det totale arealet (på innsida av gjerdet) geita kan beite i?

Du vil truleg få nytte av formelen $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$.



OPPGÅVE 5

La $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Syn at funksjonen

$$f_n(x) = x^3 + nx - 1$$

har nøyaktig eitt nullpunkt og at dette ligg i intervallet $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. (Hint: nytt skjeringssetninga ("Intermediate Value Theorem"), sekantsetninga ("Mean Value Theorem") og/eller funksjonsdrøfting.)

(b) Kall nullpunktet for a_n. Syn at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ og } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

(c) Nytt opplysningane over til å finne konvergensintervallet til rekkja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

(d) La $f(x)$ vere summen av rekkja i (a) når x ligg i konvergensintervallet. Syn at

$$\lim_{x \to 1^-} \int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

OPPGÅVE 6

La

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2} & \text{når } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{når } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Finn dei partiellderiverte til f i origo og avgjer om f er derivérbar i origo.

OPPGÅVE 7

Gje eit døme på ein funksjon som er *kontinuerleg* men ikkje *uniformt kontinuerleg* på intervallet $(0, 1)$. Hugs å grunngje svaret. (Du kan anten nytte definisjonen eller syne til generelle resultat frå pensum.)

OPPGÅVE 8

La $\{x_n\}$ vere ei strengt avtakande følgje slik at $0 < x_n < 1$ for alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Definér funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } \ x = x_n, \ n = 1, 2, 3, 4, \ldots, \\ 0 & \text{elles, } \ x \in [0, 1] \end{cases}$$

på $[0, 1]$.

Avgjer om f er Riemannintegrérbar på intervallet $[0, 1]$, og rekn i så fall ut $\int_0^1 f(x)\, dx$.

LUKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen

English translation of Exam in MAT112 – Autumn 2012

Please note that the following translation for the examination in MAT112 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: calculator according to the faculty rules.

The problem set consists of 3 pages (with problems 1-8) and consists of 16 subproblems that all count equally (for instance: problem 1(a) counts as much as the whole problem 6).

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Points will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

PROBLEM 1

Let $f(x, y) = 40 - 2x^2 + y^2$.

(a) Find the directional derivative of f in the point $(-2, 1)$ in the direction given by the vector $\mathbf{v} = (3, -4)$.

(b) In which direction does f increase the most in the point $(-2, 1)$? How big is the directional derivative in this direction?

(c) Find the equation for the tangent line of the plane curve given by

$$f(x, y) = 0$$

in an arbitrary point (a, b) on the curve.

PROBLEM 2

Consider the parametrized curve

$$x(t) = 3t^2 + 1, \quad y(t) = t^3 - 3t.$$

(a) Find all points on the curve where the tangent is horisontal.

(b) Finn the arc length of the curve between $t = 0$ and $t = 3$.

PROBLEM 3

Define the function

$$g(x, y) = x^2 - 4xy,$$

with domain

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$

(a) Sketch the area D in the plane and justify why g takes on global maximum and minimum values on the domain D.

(b) Find the maximal and minimal value of the function g when $(x, y) \in D$.

PROBLEM 4

(a) Let $a > 0$ and $l > 0$ be positive constants. Find the equations in cartesian coordinates of the two polar curves given by

$$r = a, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

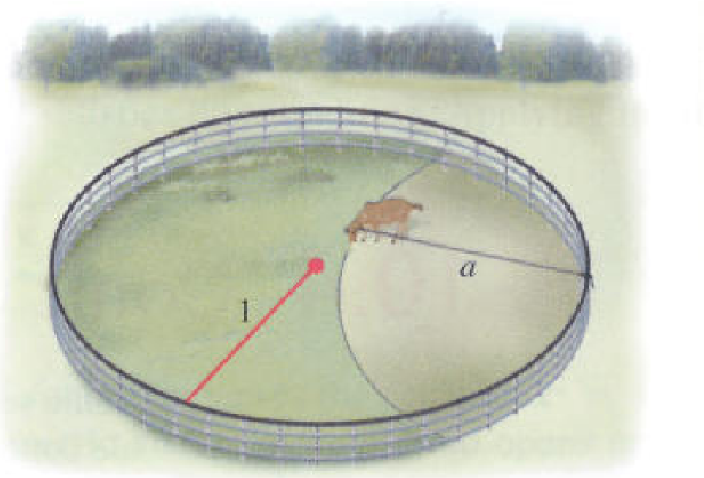
and

$$r = 2l\cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

and show that they are circles with center in $(0, 0)$ and $(l, 0)$ and radius a and l, respectively.

(b) Use (a) to solve the following problem: A goat is attached to a rope of length a on the inside of a circular fenced in region of radius $l > a$, as shown in the figure below. What is the total area (on the inside of the fence) in which the goat can graze?

You will probably need the formula $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$.



PROBLEM 5

Let $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Show that the function

$$f_n(x) = x^3 + nx - 1$$

has precisely one zero and that this lies in the interval $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. (Hint: use the Intermediate Value Theorem, the Mean Value Theorem and/or curve sketching.)

(b) Call the zero a_n. Show that

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

(c) Use the information above to find the interval of convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

(d) Let $f(x)$ be the sum of the series in (a) for x in the interval of convergence. Show that
$$\lim_{x\to 1^-} \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

PROBLEM 6

Let
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2} & \text{when } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{when } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Find the partial derivatives of f in the origin and decide whether f is differentiable in the origin.

PROBLEM 7

Give an example of a function that is *continuous* but not *uniformly continuous* on the interval $(0,1)$. Remember to justify your answer. (You may either use the definition or refer to general results about uniform continuity from our syllabus.)

PROBLEM 8

Let $\{x_n\}$ be a strictly increasing sequence such that $0 < x_n < 1$ for all $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Define the function
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x = x_n,\ n = 1,2,3,4,\ldots, \\ 0 & \text{otherwise, } x \in [0,1] \end{cases}$$
on $[0,1]$.

Decide whether f is Riemann integrable on the interval $[0,1]$, and, if so, compute $\int_0^1 f(x)\,dx$.

GOOD LUCK!

Andreas Leopold Knutsen