NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i emnet MAT112 – Grunnkurs i Matematikk II

Torsdag 7. juni 2012, kl. 09-14

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.

Oppgåvesettet er på 3 sider (med oppgåvene 1-10) og er samansett av 17 deloppgåver som alle tel likt ved sensurering (til dømes tel oppgåve 1 like mykje som oppgåve 2a).

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Alle svar skal grunngjevast, men grunngjevingane skal vere korte. Det må vere med nok mellomrekning til at framgangsmåten går tydeleg fram av det du skriv. Det vert gjeve godt med poeng for riktig framgangsmåte, sjølv om du ikkje kjem fram til korrekt svar.

OPPGÅVE 1

La R vere området i planet avgrensa av kurva gjeve i polare koordinatar ved

$$r = 2\sqrt{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

og av intervallet $[0, 2\sqrt{2\pi}]$ på x-aksen.

Skissér området R og rekn ut arealet av R.

OPPGÅVE 2

(a) Ei flue rører på seg i xy-planet. Posisjonen hennar ved eit vilkårleg tidspunkt t er gjeve ved den parametriserte kurva

$$x(t) = \sin^2 t - 1, \quad y(t) = t + \cos t \sin t.$$

Kor lang strekning går flua over tidsintervallet $[-\pi/2, \pi/2]$?

(b) Temperaturen på ein vilkårleg stad i xy-planet er gjeve ved

$$T(x, y) = x^2 + 2x - y.$$

Finn ut kva type kurver nivåkurvene til T er og skissér nokre av dei. Kva veit vi om temperaturen i planet langs ei nivåkurve til T?

(c) Vurdér påstanden: *Ved tidspunktet $t = 0$ går flua i den retninga der temperaturen avtek mest.* (Svaret skal grunngjevast.)

OPPGÅVE 3

Avgjer om funksjonen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2} & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{når } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

er kontinuerleg i origo.

OPPGÅVE 4

Gjeve funksjonen

$$f(x,y) = e^{x^2 - y^3}.$$

(a) Finn likninga for tangentplanet til flata $z = f(x,y)$ i punktet $(1, 1, f(1,1))$.

(b) Gjeve området

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

i planet. Kvifor veit vi at f har globale ekstremalverdiar over D?

(c) Finn maksimum og minimum til f over D.

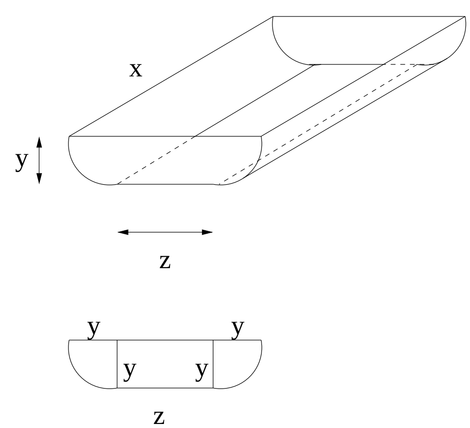
OPPGÅVE 5

Vi skal lage eit kar (utan lokk) forma som på figuren under. Botnflata er eit rektangel med breidd $z \geq 0$ og lengd $x > 0$. Endeflatene er plane flater sett saman av eit rektangel med sider av lengd z og y og to kvartsirklar med radius $y > 0$. Volumet av karet skal vere π.

(a) Syn at overflatearealet av karet kan uttrykkjast som

$$A(x,y) = \frac{\pi}{2}\Big(xy + \frac{2}{y} + \frac{4}{x}\Big).$$

(b) Nytt uttrykkjet for $A(x,y)$ i (a) til å finne det minste overflatearealet eit slikt kar kan ha. (Det skal synast at den verdien ein kjem fram til, verkeleg er eit minimum.)



OPPGÅVE 6

(a) Finn konvergensintervallet til rekkja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n.$$

(b) Finn eit enkelt uttrykk for summen av rekkja i (a) på sitt konvergensintervall.

OPPGÅVE 7

Gå ut frå at $a_n > 0$ for alle n.
Syn at $\sum a_n$ konvergerer viss og berre viss ("$\Longleftrightarrow$") $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ konvergerer.
(Hint: Syn kvar av implikasjonane "$\Longrightarrow$" og "$\Longleftarrow$" med ein passande test.)

OPPGÅVE 8

(a) La $c > 0$ vere eit vilkårleg positivt reellt tal. Gjeve følgja $\{x_n\}$ definert rekursivt ved

$$x_{n+1} = \frac{7}{10} x_n + c, \quad x_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Syn til dømes ved induksjon at

$$x_n \le x_{n+1} \le 10c \text{ for alle } n \ge 0.$$

(b) Du har fått deg ein jobb i industrien. Sjefen i fabrikken du jobber for, ynskjer å sleppe ut ei konstant mengd ulovleg forureinande avfallsstoff i eit reint vassdrag kvar kveld. Ein veit at 3/10 av stoffet forsvinn frå vassdraget i løpet av eitt døgn og at styresmaktane ikkje vil leggje merke til avfallet så lenge mengda avfall i vassdraget haldest under 200 kg.

Kor mykje avfallsstoff kan fabrikken sleppe ut konstant kvar kveld utan at grensa vert overskride? (Du får sjølvsagt nytte av (a). Nokre av dine misunnelege kollegaer sår tvil om ditt svar, så du må grunngje det godt for å overtyde sjefen.)

OPPGÅVE 9

Gje eit døme på ein avgrensa funksjon på $[0, 1]$ som *ikkje* er Riemannintegrérbar på $[0, 1]$.
(Du skal *syne* at funksjonen i ditt døme ikkje er Riemannintegrérbar.)

OPPGÅVE 10

Syn at funksjonen $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ er uniformt kontinuerleg på intervallet $(1, \infty)$.
(Du kan anten nytte definisjonen eller syne til generelle resultat om uniform kontinuitet frå pensum.)

LUKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen   Torleif Veen   Jon Eivind Vatne