MAT112 **Bokmål**

Universitetet i Bergen

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet Mat112 - Grunnkurs i matematikk II

Torsdag 5. juni 2014, kl. 09-14

Oppgavesettet er 11 oppgaver fordelt på 2 sider.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine regler.

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være nok mellomregning til at framgangsmåten går tydelig frem av det du skriver. Det blir gitt godt med poeng for riktig framgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar. Alle oppgaver teller likt.

(1) Vis at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2n\pi+\pi}{4})}{\sqrt{n}} = 0$$

ved hjelp av definisjonen for konvergens.

Løsning: Fra definisjonen for konvergens

$$|\frac{\sin(\frac{2n\pi+\pi}{4})}{\sqrt{n}} - 0| \leq |\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \epsilon$$

hvis $n > 1/\epsilon^2$.

(2) Konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2n\pi+\pi}{4})\cos(\frac{2n\pi+\pi}{4})}{\sqrt{n}} \quad ?$$

Løsning: Ja.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Rekken er alternerende og ledden går mot null.

(3) La $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$. Er f uniformt kontinuerlig?

Vis at $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ da $|x-y| < \delta$ og $x, y \in (-1, 1)$.

$$||x| - |y|| \leq |x-y| < \epsilon.$$

Velg $\delta < \epsilon$.

(4) Finn den retningsderiverte av $\phi(x, y, z) = e^{2x}\sin(\pi yz)$ i retning $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ i $(x, y, z) = (0, 1, 1)$.

Løsning:

Beregn gradienten:

$$\nabla\phi = e^{2x}(2\sin(\pi yz), \pi z\cos(\pi yz), \pi y\cos(\pi yz)).$$

I $(0, 1, 1)$.

$$\nabla\phi(0, 1, 1) = (2\sin(\pi), -\pi, -\pi).$$

Retningsderiverte:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \cdot (0, -\pi, -\pi) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(5) Hvilken geometrisk figur beskriver kurven nedenfor?

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \quad 0 \leq t \leq \pi \\ y &= b\sin t \quad (a, b > 0) \end{aligned}$$

Løsning: x og y oppfyller

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right) = 1$$

Siden $y > 0$ beskriver kurven den øvre halvdelen av en ellipse.

(6) La r, θ være de polare koordinatene. Hvor skjærer kurvene $r = \exp(\theta)$, $0 \leq \theta < \infty$ og $r = \cos(\theta)$, $0 \leq \theta < \infty$ hverandre?

Løsning: Skjæringspunkter gis av θ_0 slik at $\cos(\theta_0) = \exp(\theta_0)$. En løsning er $\theta_0 = 0$. Dvs $r_0 = 1$. Det finnes ikke flere løsninger siden $|\cos(\theta)| \leq 1$ og $\exp(\theta) > 1$ for $\theta > 0$.

Origo er ikke heller et skjæringspunkt. SVAR: $(x, y) = (1, 0)$.

(7) Beregn

$$\int_0^{0.5} e^{t^2} dt$$

med 3 korrekte desimaler.

Løsning:

$$\exp(t^2) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} \cdots$$

Siden rekken konvergerer for $|t| < 1$ kan man integrere ledd for ledd.

$$\int_0^{0.5} \exp(t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{2!5} + \frac{t^7}{3!7} \ldots |_0^{0.5}$$

I intervallet er $t^7/(42) < 0.5 \cdot 10^{-3}$. Således er

$$\int_0^{0.5} \exp(t^2)dt \approx 0.5 + \frac{0.5^3}{3} + \frac{0.5^5}{2!5} \approx 0.545$$

med 3 desimalers nøyaktighet.

(8) Beregn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} + \frac{2}{2^{n-1}}.$$

Løsning: Partialsummen kan skrives

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{5}{3^n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{4}{2^n} = 5\frac{1-(1/3)^N}{1-(1/3)} + 4\frac{1-(1/2)^N}{1-(1/2)}$$

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \frac{15}{2} + 8 = \frac{31}{2}$$

(9) Hva slags kurve beskriver ligningen

$$2x^2 + 18 - 12x = 4 + y^2 \ ?$$

Løsning: Komplettere kvadrater

$$\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$$

og konkludere at det er en hyperbel.

(10) Hva er det største arealet til et rettvinklet triangel med sidelengder som summerer til l?

Løsning: La a og h være lengden av sidene med rett vinkel imellom. (Katetene.)
Da har hypotenusen lengden $\sqrt{a^2+h^2}$.

Arealet av triangelet er $f(a,h) = ha/2$ og summen av lengden av sidene er $g(a,h) = a + h + \sqrt{a^2+h^2}$.

a og h er positive og $g(a,h) = l$ gir at f er definert på et lukket og begrenset område. Siden funksjonen $f = ah/2$ er kontinuerlig finnes ekstremalverdier.

Vi definerer Lagrangefunksjonen

$$L(a,h,\lambda) = \frac{ah}{2} + \lambda(a + h + \sqrt{a^2+h^2} - l)$$

Finn ekstremalverdier til L gjennom å beregne $\nabla L = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{h}{2} + \lambda(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}) = 0 \\ \frac{a}{2} + \lambda(1 + \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}) = 0 \\ (a + h + \sqrt{a^2+h^2} - l) = 0\end{aligned}$$

Multipliser den første ligningen med a og den andre med h og trekk de fra hverandre.

$$(a + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+h^2}}) = (h + \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}})$$

eller

$$a - h = \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{(h+a)(h-a)}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

Hvis $h - a \neq 0$, må

$$-\sqrt{a^2+h^2} = h + a$$

Siden det venstre leddet alltid er negativ og høyre alltid positiv må $h - a = 0$ i ligningen før. Dette er den eneste løsningen. Det er ikke ett minimum siden $h = 0$ eller $a = 0$ gir arealet 0.

Således er triangelet med maksimal areal for en gitt sidesum liksidig.

Fra den tredje ligningen med $h = a$.

$$h = \frac{l}{2(1+\sqrt{2})}$$

Arealet blir da

$$A = \frac{l^2}{8(1+\sqrt{2})^2} = \frac{l^2}{24 + 16\sqrt{2}}$$

(11) La

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Beregn integralet

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

ved hjelp av Riemannsummer.

Løsning: Partisjonere intervallet:

$$\begin{aligned} I_L &= [-1, -\delta/3] \\ I_0 &= [-\delta/3, \delta/3] \\ I_R &= [\delta/3, 1] \end{aligned}$$

hvor $0 < \delta < 1$. Da er

$$\begin{aligned} U_L &= L_L = 1 \\ U_R &= L_R = 0 \\ U_0 &= 2 \\ L_0 &= 0 \end{aligned}$$

Under- og oversummene kan da skrives

$$\begin{aligned} U_\delta &= U_L(1-\delta/3) + (2\delta/3)U_0 + U_R(1-\delta/3) = 1+\delta \\ L_\delta &= L_L(1-\delta/3) + (2\delta/3)L_0 + L_R(1-\delta/3) = 1-\frac{\delta}{3} \end{aligned}$$

$f(x)$ er Riemannintegrabel hvis det finnes en partisjon slik at $U - L < \epsilon$ for enhver $\epsilon > 0$. I dette tilfellet er

$$U_\delta - L_\delta = 1 + \delta - (1 - \frac{\delta}{3}) = \frac{4\delta}{3}$$

Velg $\delta < 3\epsilon/4$. Dermed er f Riemannintegrabel og Riemannsummen er $I^* = I_* = 1$.

Lykke til!
Magnus Svärd