EKSAMEN I EMNET M102 - LINEÆR ALGEBRA, HØST 1999

OPPGAVE 1

A er matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn den reduserte trapperformen til A.
(b) Finn en basis for nullrommet til A.
(c) Finn en basis for søylerommet til A, og angi dimensjonen til dette.
(d) Finn en ortogonal basis for søylerommet til A.

OPPGAVE 2

La $M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$, der a og b er gitte reelle tall.
(a) For hvilke tallpar (a, b) er matrisen M invertibel?
(b) Finn M^{-1} når $a = 1$ og $b = 2$.

OPPGAVE 3

(a) Kurven K er gitt ved ligningen $6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 14$. Hvilken type kjeglesnitt er K?
(b) Finn et nytt koordinatesystem slik at kjeglesnittet kommer i standardposisjon. Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye og kjeglesnittet.
(c) Kurven K_a har ligningen

$$6x_1^2 + 2ax_1x_2 + 3x_2^2 = 14.$$

For hvilke tall a er K_a en ellipse? For hvilke a er K_a en hyperbel? Kan K_a være noe annet enn en ellipse eller hyperbel?

OPPGAVE 4

Den lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standarbdmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn $T(1, 1, 1)$, $T(4, 2, 1)$ og $T(9, 3, 1)$.
(b) Bruk resultatene i **(a)** til å finne egenverdiene og de korresponderende egenrommene til A. Er A diagonaliserbar?
(c) Angi en basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ for $\mathbb{R}^3$ slik at B-matrisen $[T]_B$ til transormasjonen T blir en diagonalmatrise. Hva blir koordinatvektoren $[T(2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)]_B$?

(d) Avgjør om matrisen

$$E = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar.

(e) La H være matrisen

$$H = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

der a, b, c og d er gitte konstanter. Gjør rede for at H er diagonaliserbar hvis og bare hvis H har fire forskjellige egenverdier.