EKSAMEN I EMNET M102 - LINEÆR ALGEBRA, VÅR 1999

Oppgave 1

Når a og b er to gitte konstanter, lar vi $L_{a,b}$ betegne ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & ax_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & bx_2 & + & 9x_3 & = & ab. \end{array}$$

(a) Løs $L_{1,1}$.
(b) Finn de par (a, b) for hvilke $L_{a,b}$ har akkurat én løsning.
(c) Bestem for hvilke (a, b) $L_{a,b}$ har uendelig mange løsninger og løs $L_{a,b}$ i disse tilfellene.

Oppgave 2

(a) Hva vil det si at mengden $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ danner en basis for vektorrommet V?
(b) For hvilke verdier av konstanten a danner mengden $B_a = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ en basis for $\mathbb{R}^3$?
(c) Sett $a = 1$ og uttrykk de tre vektorene i standardbasisen S for $\mathbb{R}^3$ ved B_1.
(d) Finn den matrisen, $\left(\underset{S \leftarrow B_1}{P}\right)$, som uttrykker en vektors standardkoordinater ved dens koordinater med hensyn på basisen B_1.
(e) Finn de vektorene v i $\mathbb{R}^3$ for hvilke

$$[v]_s = 2[v]_{B_1}.$$

Her betyr $[v]_S$ koordinatvektoren til v med hensyn på S, og $[v]_{B_1}$ den med hensyn på B_1.
(f) Vektorene du fant i **(e)** utgjør et vektrorrom V. Vis det, og finn dimensjonen til V.

Oppgave 3

(a) Kurven K er gitt ved ligningen $x_1^2 - x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 = 50$. Hvilken type kjeglesnitt er K?
(b) K er i standardposisjon i forhold til et nytt koordinatsystem. Skisser en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og kjeglesnittet K.
(c) Kan kurven gitt ved ligningen

$$x_1^2 - x_2^2 + Ax_1x_2 = B$$

der A og B er gitte konstanter, være en sirkel?

Oppgave 4

(a) Det finnes tre typer elementære rekkeoperasjoner. Beskriv disse.
(b) Hva er en elementær matrise? Gi eksempler.
(c) Hva er en triangulær matrise? Hva blir dens determinant? (Bevis kreves ikke.)
(d) Avgjør hvilke elementære matrise som er ortogonalt diagonaliserbare.
(e) Avgjør hvilke elementære matriser som er diagonaliserbare.
(f) Bestem de elementære 2×2-matrisene som kan skrives som en sum av to elementære matriser.