UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet M102 - Lineær algebra

Mandag 27. november 2000, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator av samme type som er godkjent i den videregående skole.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for nullrommet til A.

b) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 8x_4 & = & a \\ -2x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & - & 6x_4 & = & b. \end{array}$$

For hvilke verdier av a og b har systemet

(i) akkurat en løsning,

(ii) uendelig mange løsninger,

(iii) ingen løsning?

Oppgave 2

La $\underline{u}_1 = (1,1,1)$, $\underline{u}_2 = (1,0,1)$, $\underline{u}_3 = (2,1,1)$.

a) Vis at $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$. Finn matrisen P slik at $[\underline{v}]_B = P\underline{v}$ for alle $\underline{v}$ i $\mathbf{R}^3$.

b) La $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ være en lineær transformasjon slik at

$$T(\underline{u}_1) = (2,1), \quad T(\underline{u}_2) = (0,1), \quad T(\underline{u}_3) = (1,1).$$

Hva blir $T(\underline{u}_1 + \underline{u}_2 - \underline{u}_3)$? Finn standardmatrisen til T.

Oppgave 3

a) La W være underrommet av $\mathbf{R}^5$ utspent av

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= (1,1,2,1,5) & \underline{u}_2 &= (1,3,0,-1,3) \\ \underline{u}_3 &= (1,2,1,1,5) & \underline{u}_4 &= (0,1,-1,1,1)\,. \end{aligned}$$

Finn en basis for W. Hva er dimensjonen til W?

b) La A være en 5×7 matrise hvor W i punkt a) er lik søylerommet til A. Hva er dimensjonen til nullrommet til A?

Oppgave 4

a) Kjeglesnittet K har ligningen (m.h.p. standardbasisen for $\mathbf{R}^2$)

$$x_1^2 - 8x_1 x_2 + 7x_2^2 = 36\,.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ som er slik at K's ligning i det nye koordinatsystemet er uten produktledd ("cross-product term"). Hva slags kjeglesnitt er K ?

b) Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 5

a)

$$\text{La} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beregn matriseproduktet AP.

b) Vis ved hjelp av resultatet i a), eller på annen måte, at A er diagonaliserbar.

c) La matrisen A i punkt a) være standardmatrisen til den lineære transformasjonen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Angi en basis $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ for $\mathbf{R}^3$ slik at B - matrisen $[T]_B$ til transformasjonen T blir en diagonalmatrise. Hva blir koordinatvektoren $[T(\underline{b}_1 + 3\underline{b}_3)]_B$?

d) La E og C være $n \times n$ matriser og la C være invertibel.

(i) Vis at hvis $\underline{v}$ er en egenvektor til E, så er $C^{-1}\underline{v}$ en egenvektor til $C^{-1}EC$.

(ii) Vis at hvis E er diagonaliserbar, så er $C^{-1}EC$ diagonaliserbar.

Hans-Fredrik Aas   Hans Brodersen