LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I M102 - VÅR 2000

Oppgave 1

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & b \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & b \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot b + 2 \cdot 1 \cdot 2 + a \cdot 1 \cdot 7 \\ &\quad -1 \cdot 1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot b - a \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 3b + 4 + 7a - 7 - 2b - 6a \\ &= a + b - 3 \end{aligned}$$

A er invertibel når determinanten er forskjellig fra null. Det vil si når $a + b \neq 3$.

(b) Vi skriver opp matrisen $[A|I]$ og rekkereduserer den. Da vil vi få matrisen $[I|A^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Altså ser vi at

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Fra Cramers regel vet vi at det finnes nøyaktig én løsning når determinanten til koeffisientmatrisen til ligningssystemet er forskjellig fra null. Så når $a + b - 3 \neq 0$, har vi bare én løsning.

Vi ser da på hva som skjer når $a+b-3 = 0$. Vi skriver opp totalmatrisen og rekkereduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & b & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & -2 \\ 0 & 3 & b-2a & b-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & -2 \\ 0 & 0 & a+b-3 & b+2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$$

Systemet er inkonsistent hvis vi i den rekkereduserte matrisen har en rad hvor alle tallene er nuller, bortsett fra tallet lengst til høyre som er forskjellig fra null. Vi ser at vi har en slik rad hvis $b+2 \neq 0$. Hvis $b+2=0$, har vi ikke en slik rad. I det tilfellet har vi en søyle uten pivoter, som betyr at vi har en fri variabel, slik at vi har uendelig mange løsninger. Konklusjonen blir:

(i) Akkurat én løsning når $a+b \neq 3$.
(ii) Uendelig mange løsninger når $a=5$ og $b=-2$.
(iii) Ingen løsninger når $a+b=3$ og $b \neq -2$.

(c) Vi skriver ligningssystemet som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der A er koeffisientmatrisen, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b}$ er løsningsvektoren, nemlig $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Da sier Cramers regel at

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}.$$

Her betegner $A_i(\mathbf{b})$ den matrisen vi får når vi bytter ut kolonne nummer i i A med $\mathbf{b}$. Når $a=b=2$, vet vi at $\det A = a+b-3 = 2+2-3 = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} \det A_3(\mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 7 - 1\cdot 0\cdot 7 - 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 2 \\ &= 6+0+14-0-4-12 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Da blir

$$x_3 = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{4}{1} = 4.$$

Oppgave 2

(a) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ danner en basis for vektorrommet V hvis mengden er lineært uavhengig og utspenner V.

(b) Vi setter opp matrisen $[[c_1]_B[c_2]_B[c_3]_B]$ Hvis denne kan rekkereduseres til identitetsmatrisen, er også C en basis for V. Vi får:

$$[[c_1]_B[c_2]_B[c_3]_B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi konkluderer med at C er en basis for V.

Matrisen P vil være lik $[[b_1]_C[b_2]_C[b_3]_C]$. Vi ser at

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1 \\ b_2 &= c_2 - c_1 \\ b_3 &= c_3 - c_2 + c_1, \end{aligned}$$

så $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Standardmatrisen til T er $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Vi vet at $[T]_D = [[T(d_1)]_D[T(d_2)]_D[T(d_3)]_D]$. Da må vi regne ut $T(d_i)$ for $i = 1, 2, 3$. Vi får

$$\begin{aligned} T(d_1) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2d_1 - d_2 + d_3 \\ T(d_2) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2d_1 + 2d_3 \\ T(d_3) &= T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2d_2 + d_3 \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} [T(d_1)]_D &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [T(d_2)]_D &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [T(d_3)]_D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

så

$$[T]_D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3

(a) Standardmatrisen til kjeglesnittet K er $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Den ortonormale basisen B vil ha egenvektorene til A som søyler. Vi starter med å finne det karakteristiske polynomet til A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - (-2)^2 = (\lambda - 9)(\lambda - 4)$$

Vi ser av dette at egenverdiene til A er 9 og 4. Så finner vi egenvektorer som korresponderer med egenverdiene. Vi starter med egenverdien 9:

$$A - 9I = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir egenvektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Så egenverdien 4:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her får vi egenvektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

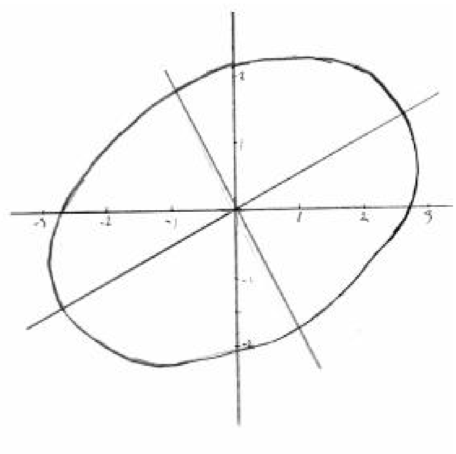
For å finne den ortonormale basisen B, må vi normaliere egenvektorene vi har funnet. Da får vi at

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}.$$

Hvis vi lar variablene i det nye koordinatsystemet være y_1 og y_2, vil ligningen for K være $9y_1^2 + 4y_2 = 36$.

Siden egenverdiene til A har samme fortegn, er K en ellipse.

(b)



OPPGAVE 4

(a) La A være en kvadratisk matrise. λ er en egenverdi til A hvis det finnes en vektor $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vektoren $\mathbf{v}$ er da en egenvektor til A. A er diagonaliserbar hvis det finnes en diagonal matrise D og en invertibel matrisen P slik at $A = PDP^{-1}$.

(b) Vi lar $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Da blir

$$E\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}.$$

Da ser vi at $\mathbf{v}$ er en egenvektor til E med tilhørende egenverdi 2.

For å finne ut om E er diagonaliserbar, finner vi først det karakteristiske polynomet til E. Det blir

$$\begin{aligned}\det(E-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)+(-6)-6(1-\lambda)-2(-3)(2-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)^2.\end{aligned}$$

E har altså to egenverdier, 1 og 2. Egenverdien 1 har multiplisitet 1, mens 2 har multiplisitet 2. Det vi må sjekke da er dimensjonen til egenrommet til 2. For at E skal være diagonaliserbar, må dimensjonen til ethvert egenrom være lik multiplisiteten til den korresponderende egenverdien. Egenrommet til egenverdien 2 er lik nullrommet til matrisen $E-2I$. Vi får:

$$E-2\lambda = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den rekkereduserte matrisen har to pivoter, så vi får én fri variabel. Det medfører at egenrommet til egenverdien 2 har dimensjon 1. Siden multiplisiteten til egenverdien 2 er 2, følger det at E ikke er diagonaliserbar.

(c) Siden A er symmetrisk, er A ortogonalt diagonaliserbar. Vi har oppgitt to ortogonale egenvektorer, så for å finne P må vi finne en tredje vektor som er ortogonal til de to forrige. Det vil si at vi må finne en vektor (x,y,z) slik at $(1,1,2)\cdot(x,y,z)=0$ og $(1,-1,0)\cdot(x,y,z)=0$. Da får vi

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2x & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0, \end{array}$$

slik at $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$ for $t \in \mathbb{R}$. Da har vi tre ortogonale egenvektorer, $(1,1,2)$, $(1,-1,0)$ og $(-1,1,1)$. Hvis vi normaliserer disse, får vi $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ og $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$. Da får vi

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Siden P er en ortogonal matrise, er $P^{-1}=P^T$, så

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

(d) Siden både A og B er symmetriske, er de begge ortogonoalt diagonaliserbare. Da finnes det en ortogonal matrise P (som vi fant i **(c)**) slik at $A=P^TDP$, der D er en diagonalmatrise med egenverdiene til A på diagonalen, og det finnes en ortogonal matrise P' slik at $B={P'}^TD'P'$, der D' er en diagonalmatrise med egenverdiene til B på diagonalen. Siden A og B har det samme karakteristiske polynom, har de de samme egenverdiene. Det betyr at vi kan ordne elementene på diagonalen i D og D' slik at $D=D'$. Da får vi

$$PAP^T = D = D' = P'B{P'}^T,$$

slik at

$$B = P'^T P A P^T P' = (P^T P')^T A (P^T P').$$

Setter vi $Q = P^T P'$, får vi formelen vi ønsker, nemlig $Q^T A Q = B$. Vi ser også at

$$Q^{-1} = (P^T P')^{-1} = P'^{-1} P^{T^{-1}} = P'^T P = (P^T P')^T = Q^T,$$

så Q er en ortogonal matrise.