EKSAMEN I EMNET M102 - LINEÆR ALGEBRA, VÅR 2000

Oppgave 1

La A betegne koeffisientmatrisen til ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & bx_3 & = & b \end{array}$$

(a) Beregn determinanten til A. For hvilke verdier av a og b er A invertibel?
(b) Finn A^{-1} nå $a = b = 2$.
(c) For hvilke verdier av a og b har ligningssystemet

(i) akkurat en løsning,
(ii) uendelig mane løsninger,
(iii) ingen løsning?

(d) Bruk Cramers regel til å finne x_3 når $a = b = 2$.

Oppgave 2

(a) Hva vil det si at mengden $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ danner en basis for vektorrommet V?
(b) Sett $n = 3$ og la $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ være en basis for V. La

$$c = b_1, c_2 = b_1 + b_2 \text{ og } c_3 = b_2 + b_3.$$

Vis at $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ også er en basis for V. Finn matrisen P slik at $[v]_C = P[v]_B$ for alle v i V.
(c) Den lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ & & 2x_2 & + & x_3 \\ x_1 & + & x_2 & & \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen til T.
(d) La D være basisen $\{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$ for $\mathbb{R}^3$. Finn D-matrisen $[T]_D$ til transformasjonen T.

Oppgave 3

(a) Kjeglesnittet K har ligningen (med hensyn på standardbasisen for $\mathbb{R}^2$)

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36.$$

Finn en ortonormal basis B for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten produktledd ("cross-procudt term"). Hva slags kjeglesnitt er K?
(b) Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye og K.

OPPGAVE 4

(a) Definer egenverdi og egenvektor for en kvadratisk matrise. Hva mener vi med at en kvadratisk matrise er diagonaliserbar?

(b) Vis at $(2, 1, 2)$ er en egenvektor til matrisen

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hva er den tilhørende egenverdien? Avgjør om E er diagonaliserbar.

(c) La A vær en symmetrisk matrise som har egenvektorene $(1, 1, 2)$ og $(1, -1, 0)$. Finn en ortogonal matrise P som diagonaliserer A. Hva blir P^{-1}?

(d) La B være en symmetrisk matrise med samme karakteristiske polynom som A. Gjør rede for at det finnes en ortogonal matrise Q slik at $Q^T AQ = B$.