LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I M102 - HØST 2001

Oppgave 1

(a) Vi skriver opp totalmatrisen til ligningssystemet og rekkereduserer den:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Løsningen er altså $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ og $x_4 = 0$.

(b) Også her får vi en matrise vi kan rekkeredusere.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & a & b-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{array}\right]$$

Vi ser at hvis $a-1 \neq 0$, har vi en pivot i hver søyle og hver rad, så vi har en entydig løsning. Anta da at $a-1=0$. Hvis $b-1 \neq 0$, har vi en rad der alle tallene er lik null, unntatt tallet lengst til høyre. I dette tilfelle er systemet inkonsistent og vi har ingen løsninger. Dersom $b-1=0$, er systemet konsistent, og siden vi har en søyle uten pivoter, finnes uendelig mange løsninger. Svaret blir da:

(i) Entydig løsning når $a \neq 1$.
(ii) Uendelig mange løsninger når $a = 1$ og $b = 1$.
(iii) Ingen løsninger når $a = 1$ og $b \neq 1$.

(c) Igjen skriver vi opp totalmatrisen til ligningssystemet og rekkereduserer:

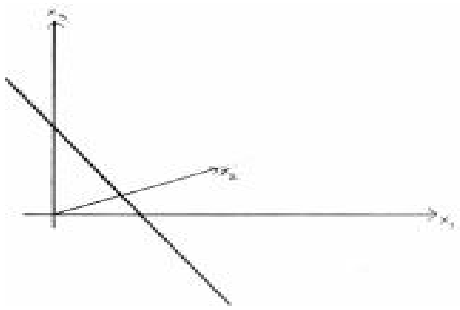
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Vi får altså at

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = \frac{1}{2} \\ & x_2 + x_3 & = \frac{1}{2} \end{array}$$

Det finnes ingen pivot i den tredje kolonnen, så x_3 er en fri variabel. Da får vi løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3.$$



Oppgave 2

(a) Vi lar matrisen som er oppgitt være A. Vi får da

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix} = T(x).$$

Altså er A standardmatrisen til T.

Vi ser at

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den rekkereduserte matrisen har tre pivoter, og en søyle uten pivot. Det medfører at rangen er 3 og at nulliteten er 1.

Rekkevidden til T er det samme som søylerommet til A. Basisen for dette rommet består av de søylene i A som korresponderer med pivotsøylene i den rekkereduserte matrisen. Basisen blir altså

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\ker(T)$ er det samme som nullrommet til A. Den rekkereduserte matrisen gir:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Den fjerde søylen har ikke noen pivot, så x_4 er en fri variabel. En løsningsvektor vil da være på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4.$$

Basisen for $\ker(T)$ blir da

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Standardmatrisen til transformasjonen T er ortogonalt diagonaliserbar siden den er symmetrisk. For å finne egenverdiene, regner vi ut det karakteristiske polynomet, $\det(A - \lambda I)$.

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2((1-\lambda)^2-1) - ((1-\lambda)^2-1) \\
&= (\lambda^2-1)(\lambda^2-2\lambda) \\
&= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)\lambda
\end{aligned}$$

Vi ser fra den siste linja at egenverdiene er -1, 0, 1 og 2. Vi skal finne en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$ slik at T er gitt ved en diagonalmatrise med hensyn på den basisen. For å finne den, må vi finne egenvektorer for hver egenverdi. Det gjør vi vet å rekkeredusere og finne nullrommet til matrisene $A - \lambda I$ for hver egenverdi λ til A.

$\lambda = -1$:

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den rekkereduserte matrisen gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{aligned}$$

En løsningsvektor her blir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2.$$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er da en egenvektor, men vi ønsker en egenvektor med lengde 1, så vi må normalisere den. Da får vi $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 0$:

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektoren blir $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Tilsvarende får vi egenvektoren $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ for egenverdien 1, og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ for egenverdien 2.

Den ortonormale basisen blir da $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$, og diagonal-matrisen til T er matrisen med egenverdiene på diagonalen, nemlig $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 3

(a) Vektorene $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^p$ er lineært uavhengig hvis den eneste løsningen på ligningen

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_p\mathbf{v_p} = 0$$

er $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$.

Vektorene utspenner $\mathbb{R}^n$ hvis enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_p}$.

Hvis V er et lineært underrom av $\mathbb{R}^n$, så er en basis for V en mengde vektorer i V som er lineært uavhengig og utspenner V.

(b) Vi skriver opp matrisen $[\mathbf{u_1}\mathbf{u_2}\mathbf{u_3}\mathbf{u_4}]$ og rekkereduserer

$$[\mathbf{u_1}\mathbf{u_2}\mathbf{u_3}\mathbf{u_4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at matrisen kan rekkereduseres til identitetsmatrisen, så vektorene danner en basis for $\mathbb{R}^4$.

Ligningssystemet løser vi ved å rekkeredusere matrisen $[\mathbf{u_1 u_2 u_3 u_4}|\mathbf{v}]$.

$$[\mathbf{u_1 u_2 u_3 u_4}|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Vi ser av dette at

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -1 \\ c &= -1 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

(c) Vi viste i **(b)** at vektorene $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ og $\mathbf{u_4}$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^4$. Det innebærer at vektorene $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ og $\mathbf{u_3}$ er lineært uavhengige. Da vil $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ utgjøre en basis for rommet det utspenner. Siden basisen til W da består av tre vektorer, er $\dim(W) = 3$.

Så skal vi finne en ortonormal basis. For å gjøre regningen lettere, ordner vi vektorene slik at de med flest nuller kommer først. Vi setter $\mathbf{u'_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u'_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u'_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Gram-Schmidt-algoritmen gir da

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}'_2 - \frac{\mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}'_3 - \frac{\mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{v_1}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{v_2}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av disse tre vektorene er det bare $\mathbf{v}_1$ som ikke allerede har lengde 1. Vi normaliserer da $\mathbf{v}_1$ og får $\mathbf{v}_1' = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Den ortonormale basisen for W er da

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) La $\mathbf{v}'$ være den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{v}$ ned i W. Da blir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 \\ &= \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{3}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 4

(a) De tre typene kjeglesnitt som finnes er ellipsen, hyperbelen og parabelen. I tillegg kan et kjeglesnitt degenerere til rette linjer eller et punkt. Et kjeglesnitt er på standard form hvis ligningen som angir kjeglesnittet ikke inneholder et kryssledd, det vil si et ledd med faktoren xy. Figurene er på neste side.

(b) Standardmatrisen til kjeglesnittet er

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at matrisen har egenverdiene 2 og 4. Siden disse har samme fortegn, er kjeglesnittet en ellipse. Vi finner da en egenvektor til hver av egenverdiene:

$\lambda = 4$:

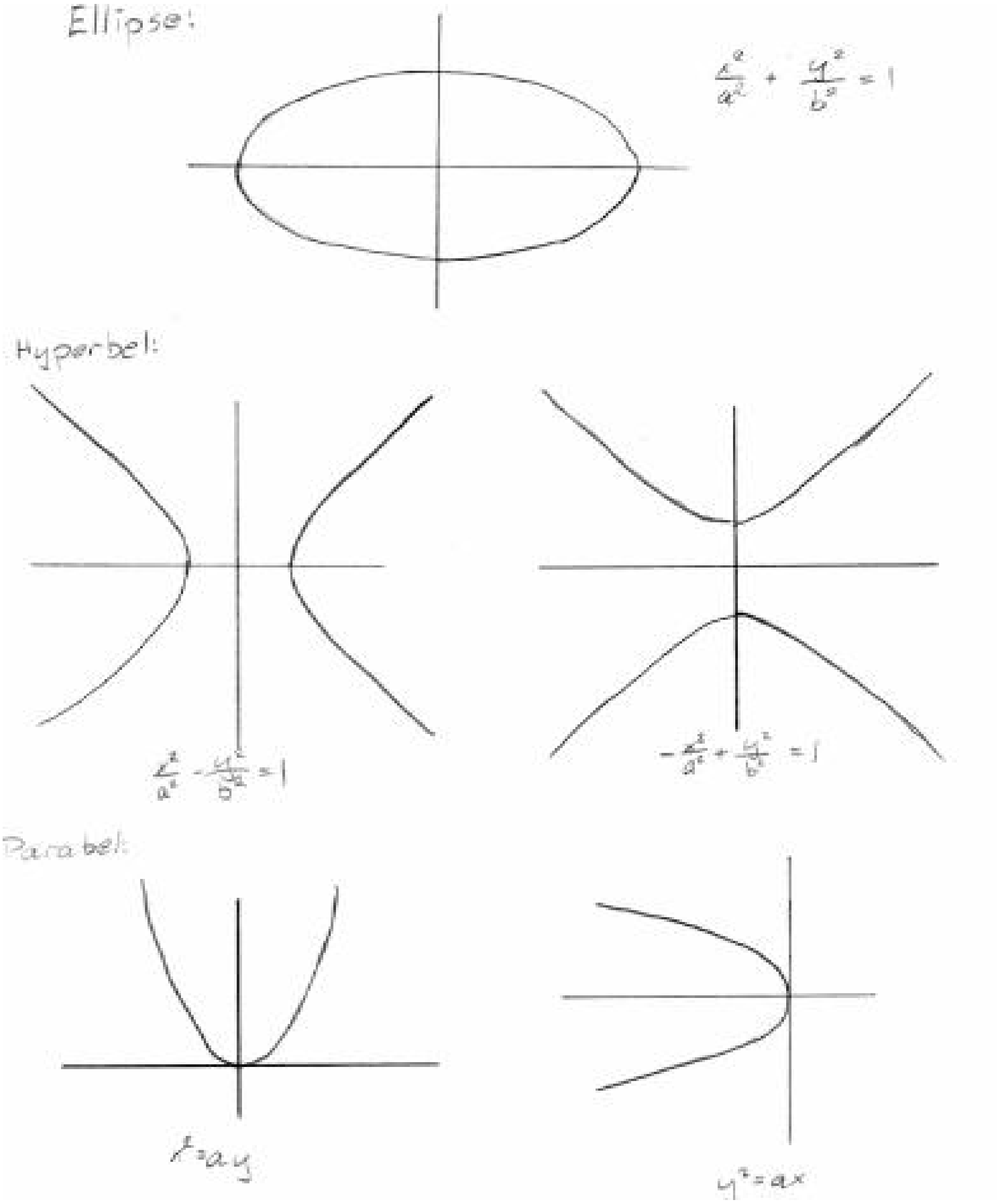
$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir egenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Siden vi vil ha den normalisert, får vi $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

$\lambda = 2$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her får vi egenvektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, slik at den normaliserte egenvektoren blir $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.



Da kan vi diagonalisere A, ved å sette

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

og

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da er $A = P^{-1}DP$. Vi definerer da nye koordinatakser x' og y' slik at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Setter vi dette inn i ligningen for K, får vi

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x &= 4x'^2 + 2y'^2 + 4\sqrt{2}(x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= 4x'^2 + 2y'^2 + 4x' - 4y'. \end{aligned}$$

Ligningen for K med de nye koordinataksene er dermed

$$4x'^2 + 2y'^2 + 4x' - 4y' = 0.$$

Med disse koordinataksene, vil aksene til K være parallelle til aksene i korrdinatsystemet. Men i tillegg ønsker vi at sentrum i ellipsen vår skal falle sammen med origo i koordinatsystemet. Vi bruker fullstendige kvadraters metode og får følgende:

$$\begin{aligned} 4(x'^2 + x') + 2(y'^2 - 2y') &= 0 \\ 4\left(x'^2 + x' + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\left(y'^2 - 2y' + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ 4\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y' - 1\right)^2 &= 3 \end{aligned}$$

Vi setter $x'' = x' + \frac{1}{2}$ og $y'' = y' - 1$. Da blir K uttrykt ved ligningen

$$4x''^2 + 2y''^2 = 3.$$