EKSAMEN I EMNET M102 - LINEÆR ALGEBRA, HØST 2001

OPPGAVE 1

(a) Løs ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & & & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

(b) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & & & + & ax_4 & = & b \end{array}$$

(i) For hvilke verdier av a og b har systemet en entydig løsning?
(ii) For hvilke verdier av a og b har systemet uendelig mange løsninger?
(iii) For hvilke verdier av a og b har systemet ingen løsning?
(c) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Finn den generelle løsningen, og skriv den på vektorfrom. Tegn en figur som viser løsningsmengden som delmengde av $\mathbb{R}^3$.

OPPGAVE 2

En lineær transfromasjon $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er gitt ved

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}.$$

Vis at transformasjonens standardmatrise er

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Regn ut rang og nullitet, og finn en basis for rekkevidden $R(T)$, og for nullrommet $\ker(T)$.

(b) Forklar uten regning at standardmatrisen til transformasjonen T i punkt **(a)** er ortogonalt diagonaliserbar. Vis at matrisens egenverdier er -1, 0, 1 og 2, og bestem en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$ slik at T er gitt ved en diagonalmatrise med hensyn på denne.

OPPGAVE 3

(a) Hva vil det si at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ er *lineært uavhengige*? Hva vil det si at de *utspenner* $\mathbb{R}^n$? Definer begrepet *basis* for et lineært underrom av $\mathbb{R}^n$.

(b) Vis at

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{u}_2 = (0,1,1,1), \mathbf{u}_3 = (0,0,1,1), \mathbf{u}_4 = (0,0,0,1)$$

utgjør en basis for $\mathbb{R}^4$. La $\mathbf{v} = (4,3,2,1)$. Finn a, b, c, d slik at

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 + d\mathbf{u}_4.$$

(c) La W være det lineære underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Hva er dimensjonen til W? Bruk Gram-Schmidtprosedyren til å finne en ortonormal basis for W.

(d) Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren $\mathbf{v}$ gitt i punkt **(b)** ned i underrommet W.

OPPGAVE 4

(a) Forklar kort hvilke kjeglesnitt som finnes. Hva vil det si at et kjeglesnitt er på standardform i forhold til koordinatsystemet? Tegn figur og angi ligningene for kjeglesnittene på standardform.

(b) Et kjeglesnitt K har ligningen

$$3x_1 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x = 0.$$

Finn et nytt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ slik at kjeglesnittet blir på standardform. Hva slags kjeglesnitt er K? Tegn en figur som viser kjeglesnittet sammen med de gamle og de nye koordinataksene, og tegn inn vektorene i den nye ortonormale basisen for $\mathbb{R}^2$ som gir retningene på de nye koordinataksene.