NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitskapelege fakultetet.

Eksamen i emnet M 102 - Lineær algebra.
Måndag 14. mai 2001, kl. 09-14

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator av same type som er godkjend i den vidaregåande skulen.

Oppgåve 1

a) Løys likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

b) Ein er gjeven likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & b \end{array}$$

i) For kva verdiar av a og b har systemet ei eintydig løysing?
ii) For kva verdiar av a og b har systemet uendeleg mange løysinger?
iii) For kva verdiar av a og b har systemet inga løysing?

c) Ein er gjeven likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

Finn den generelle løysinga, og skriv den på vektorform.

d) Ein lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ er gjeven ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 \\ & - & x_2 & + & x_3 & & \end{bmatrix}$$

Finn transformasjonen sin rang og nullitet. Finn ein basis for rekkevidda $R(T)$, og bruk Gram-Schmidt prosedyren til å finna ein ortonormal basis for $R(T)$.

Oppgåve 2

a) Vis at

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,0,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,0,0), \mathbf{u}_3 = (0,0,-1,0), \mathbf{u}_4 = (1,0,2,3)$$

er ein basis for $\mathbb{R}^4$. La $\mathbf{v} = (2,2,4,1)$. Finn a, b, c, d slik at

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 + d\mathbf{u}_4$$

b) Ein lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er gjeven ved

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Skriv opp $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3), T(\mathbf{e}_4)$, der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ er standardbasisen i $\mathbb{R}^4$. La så B vera basisen gjeven i a). Finn overgangsmatrisa frå koordinatar med omsyn på B til koordinatar med omsyn på standardbasisen. Finn deretter matrisa $M(T, B)$ for T med omsyn på basisen B.

c) Forklar utan rekning at standardmatrisa til transformasjonen T i punkt b) er ortogonalt diagonaliserbar. Vis så at denne matrisa har eigenverdiane $0, 1$ og 3, og finn ein ortonormal basis C for $\mathbb{R}^4$ slik at T er gjeven ved ei diagonalmatrise med omsyn på C.

Oppgåve 3

a) Forklar kort kva kjeglesnitt som fins. Kva vil det seia at eit kjeglesnitt er på standard form i høve til koordinatsystemet?

b) Eit kjeglesnitt K har likninga

$$8x^2 + 20xy + 8y^2 - 9 = 0.$$

Finn eit nytt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ slik at kjeglesnittet vert på standard form. Kva slags kjeglesnitt er K?

c) Teikn ein figur som syner dei gamle og dei nye koordinataksane, og teikn inn vektorane i den nye ortonormale basisen for $\mathbb{R}^2$ som gjev retningane på dei nye koordinataksane.

Oppgåve 4

a) Kva vil det seia at ei matrise er diagonaliserbar?

b) Avgjer om dei fylgjande matrisene er diagonaliserbare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Audun Holme | Hans Brodersen