UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i M102 - Lineær algebra

Fredag 4. desember 2002, kl. 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler: kalkulator av den typen som er godkjent i den videregående skolen.

Oppgave 1

a) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & + & u & = & 6 \\ & & y & - & 2z & - & u & = & 5 \\ x & + & y & + & 3z & & & = & -3 \\ & - & y & + & 2z & + & 3au & = & -2b \end{array}$$

For hvilke verdier av a og b har systemet

i) en entydig løsning?

ii) mange løsninger?

iii) ingen løsning?

b) Formuler Cramers regel. Bevis dette resultatet dersom totalmatrisen er på redusert trappeform.

c) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ x & + & 3y & & & = & -3 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \end{array}$$

Bruk Cramers regel til å finne z i løsningen til ligningssystemet.

Oppgave 2

a) Gi definisjonen på en invertibel $n \times n$ matrise A.

b) Hva vil det si at mengden av vektorer $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_p\}$ i $\mathbf{R}^n$ er lineært uavhengige.

c) Definer begrepet basis for et lineært underrom W av $\mathbf{R}^n$.

d) Definer egenverdi og egenvektor for en kvadratisk matrise A. Vis at når $\lambda = 0$ er en egenverdi til A så er $det\, A = 0$.

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har ligningen (m.h.p. standardbasisen for $\mathbf{R}^2$)

$$8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 36\,.$$

Finn en ortonormal basis B for $\mathbf{R}^2$ som er slik at K's ligning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten produktledd ("cross-product term"). Hva slags kjeglesnitt er K ?

b) Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye og K.

Oppgave 4

a) La $\underline{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\underline{u}_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\underline{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Vis at dette er en basis B for $\mathbf{R}^4$. Regn ut overgangsmatrisen fra koordinater med hensyn på standardbasis til koordinater med hensyn på denne nye basisen B.

b) La U være det lineære underrommet utspent av vektorene $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ og $\underline{u}_3$, fra punkt a). Bruk Gram-Schmidt prosedyren til å finne en ortonormal basis for U.

c) La $T : V \to W$ være en lineær transformasjon fra et vektorrom V som er av dimensjon n til et vektorrom W som er av dimensjon m. Definer rangen og nulliteten til T, og skriv opp en relasjon mellom dem.

d) En lineær tranformasjon $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 - x_5 \\ x_3 + x_4 + x_5 \end{bmatrix}$$

Finn standardmatrisen til T.

e) Finn nullrommet og rekkevidden til T og regn ut rangen og nulliteten til T.

f) Finn matrisen for T med hensyn på standardbasisen for $\mathbf{R}^5$ og basisen B for $\mathbf{R}^4$ gitt i punkt a).

Svein Mossige Hans Brodersen