BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i M102 - Lineær algebra

Mandag 3. november 2003, kl. 09.00 - 14.00

Tillatte hjelpemidler: kalkulator av samme type som er godkjent i den videregående skolen.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Finn en basis for søylerommet til A og en basis for rekkerommet til A.

c) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & ax_4 & = & b \end{array}$$

(i) For hvilke verdier av a og b har systemet ingen løsning?

(ii) For hvilke verdier av a og b har systemet uendelig mange løsninger?

d) Finn den generelle løsning av ligningssystemet i punkt c) når systemet er konsistent.

Oppgave 2

a) La

$$M_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & s \end{bmatrix} \text{ der } s \text{ er et reelt tall.}$$

For hvilke reelle tall s er matrisen M_s invertibel? Finn den inverse matrisen til M_1.

b) La $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ være en basis for vektorrommet V. La

$$\underline{c}_1 = -\underline{b}_2 + 2\underline{b}_3 , \quad \underline{c}_2 = \underline{b}_1 - \underline{b}_3 , \quad \underline{c}_3 = -2\underline{b}_1 + \underline{b}_2$$

Avgjør om $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ er en basis for V.

c) Den lineære transformasjonen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} & x_2 & -2x_3 \\ -x_1 & & +2x_3 \\ 2x_1 & -2x_2 & \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen til T. Vis at $T(\underline{v})$ og $\underline{v}$ er ortogonale for alle $\underline{v} \in \mathbf{R}^3$. Finn en basis for kjernen ("kernel") til T.

d) Kontroller at $D = \{\underline{d}_1, \underline{d}_2\, \underline{d}_3\} = \{(0, -1, 2),\ (1, 0, -1),\ (-2, 1, 1)\}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$. Finn matrisen $[T]_D$ (matrisen til T relativt til basisen D).

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har ligningen (m.h.p. standardbasisen for $\mathbf{R}^2$)

$$3x_1^2 - 4x_1x_2 = 4.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at K's ligning i det nye aksesystemet er uten produktledd ("cross-product term"). Hva slags kjeglesnitt er K?

b) Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 4

a) La

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at $(0, 1, 1)$ er en egenvektor til E. Hva er den tilhørende egenverdien? Avgjør om E er diagonaliserbar.

b) Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

c) Vis at E og den transponerte matrisen E^T har samme karakteristiske polynom.

d) Anta at $E\underline{u} = \lambda_1\underline{u}$ og $E^T\underline{v} = \lambda_2\underline{v}$ hvor $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vis at vektorene $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er ortogonale.

Hans-Fredrik Aas