UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i M102 - Lineær algebra

Mandag 2.juni 2003, kl. 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler: kalkulator av samme type som er godkjent i den videregående skolen.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en basis for søylerommet til A.

b) Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & ax_4 & = & 2a \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & & & = & b \end{array}$$

For hvilke verdier av a og b har systemet

i) akkurat en løsning,

ii) uendelig mange løsninger,

iii) ingen løsning?

c) Finn den generelle løsning av ligningssystemet i punkt b) når $a = 1$ og $b = 2$, og skriv løsningen på vektorform.

Oppgave 2

a) La

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ s & 1 & 1 \\ s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ der } s \text{ er et reelt tall.}$$

Vis at matrisen M_s er invertibel for alle reelle tall s, og finn den inverse matrisen til M_2.

1

b) La $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ være en basis for vektorrommet V. La

$$\underline{c}_1 = \underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 + 2\underline{b}_3, \quad \underline{c}_2 = \underline{b}_2 + \underline{b}_3, \quad \underline{c}_3 = 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2\,.$$

Vis at $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ også er en basis for v. Finn matrisen P slik at $[\underline{v}]_C = P[\underline{v}]_B$ for alle $\underline{v}$ i V.

c) Den lineære transformasjonen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Finn standardmatrisen til T. Finn en ortogonal basis for rekkevidden ("range") til T.

d) Kontroller at $D = \{\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3\} = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$. Finn matrisen M slik at $T(\underline{v}) = M[\underline{v}]_D$ for alle $\underline{v}$ i $\mathbf{R}^3$.

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har ligningen (m.h.p. standardbasisen for $\mathbf{R}^3$)

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 24\,.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at K's ligning i det nye aksesystemet er uten produktledd ("cross-product term"). Hva slags kjeglesnitt er K ?

b) Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 4

a) Gi definisjonen på at en kvadratisk matrise er diagonaliserbar. Gi også definisjonen på at en kvadratisk matrise er ortogonalt diagonaliserbar.
Hvilke matriser er ortogonalt diagonaliserbare?

b) Finn egenverdiene til matrisen

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om E er diagonaliserbar.

c) La $\underline{u}_1 = (1,0,1)$ og $\underline{u}_2 = (-1,2,0)$. Anta at $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ er egenvektorer til en symmetrisk matrise A. Kan $\underline{u}_1$ og $\underline{u}_2$ tilhøre forskjellige egenverdier? Svaret skal begrunnes.
Finn en ortogonal matrise som diagonaliserer A.

Hans-Fredrik Aas Hans Brodersen

2