FASITER, TIL BRUK I

MAT 121

(FRA EKSAMENER I M102)

Fasit, 3. november 2003, M 102

1a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1b $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, for søylerommet og $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ for radrommet

(Flere svar mulig for 1b.)

1c (i) $a=0$, og $b \neq -3$ gir ingen løsning.
(ii) Uendelig mange løsninger for alle andre kombinasjoner av a og b.

1d
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a-b+3}{a} \\ \frac{a+b-3}{a} \\ 0 \\ \frac{b-3}{a} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
er én måte å skrive dette på.

2a M_s er invertibel for alle $s \neq 0$. $M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

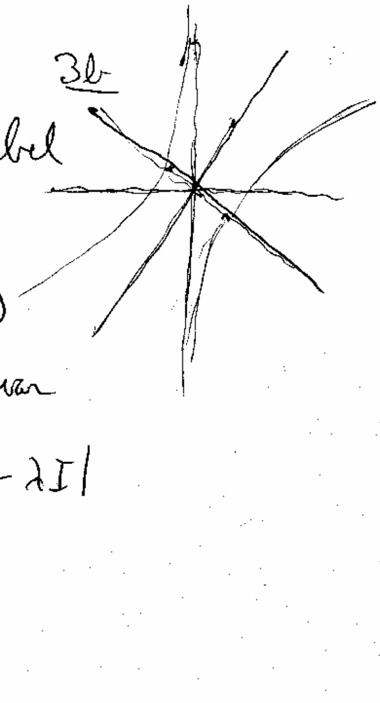
2b Nei, ikke en basis

2c Standardmatrisen er: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ Basis for kjernen er f.eks. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

2d $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ er [illegible] $[T]_D$.

3a $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \end{bmatrix} \right\}$ er ort.n. basis. Får hyperbel

3b



4a Egenverdien er -1. Ja, E er diag.bar (fordi det er 3 forskj. egenverdier)

4b $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ett mulig svar er dette)

4c $|E - \lambda I| = |(E-\lambda I)^T| = |E^T - (\lambda I)^T| = |E^T - \lambda I|$

Fasit, juni - 2003

Oppgave 1 a): Red. tr. form: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ er basis for søylerommet

1b. (i) Aldri, (ii) $a \neq 1$, en fri variabel, og $a = 1$, og $b = 2$, to frie var.

(iii) $a = 1$, og $b \neq 2$

1c
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2a. $|M_s| = -1 \neq 0$ for alle s, så M_s invertibel for alle s.

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2b. $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

En viser at $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ er lin. uavh. ved å vise $\{[\vec{c}_1]_B, [\vec{c}_2], [\vec{c}_3]\}$ lin. uavh.
Tre uavh. vektorer i 3-dim rom gir basis.

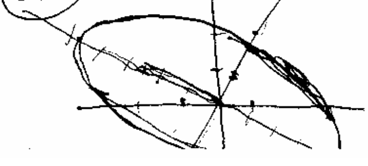
2c Standardmatrise: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ort. basis eks. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

Flere svar mulig her

2d. D er basis siden $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3a. Ortonormalbasis: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$ Begge eg.verdier positive, så vi får ellipse

3b



Fasit, juni 2003, fits

(4a) Se boka for definisjoner. De ~~symmetriske~~ er ort. diag. bare

(4b) $\lambda = 1, -1, 3$ er egenverdier

For symmetriske matriser vil egenvektorer $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$ tilhørende forskjellige egenverdier være slik at $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, men her har vi $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1 \neq 0$. Så svaret er: Nei.

ort. matrise som diag. A er
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/3\sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Fasit, desember 2002

(1a) (i) $a \neq \frac{1}{3}$, (ii) $a = 1/3$ og $b = \frac{5}{2}$ (iii) $a = 1/3$, $b \neq \frac{5}{2}$

(1b) Se læreboka.

(1c) $z = \frac{3}{2}$. (2a) Det finnes matrise B slik at $AB = BA = I_n$

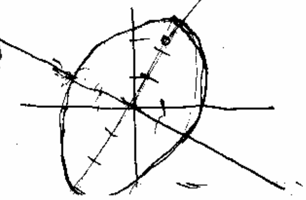
(2b) $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$ bare hvis $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$.

(2c) En basis for W er en samling vektorer $\{\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_p\}$ som er lineært uavhengige, og spenner W.

(2d) Egenvektor: Vektor $\vec{x} \neq 0$, slik at $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, for passe $\lambda \in \mathbb{R}$.
Hvis $\lambda = 0$ er egenverdi, finnes $\vec{x} \neq 0$, slik at $A\vec{x} = \vec{0}$, generelt $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ for $\vec{x} \neq 0$.
Vi får da $\det[A - \lambda I] = \det A = 0$

(3a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$. Begge egenverdier pos, så vi får ellipse

(3b)



Fasit, desember 2002, fortsatt.

(4a.) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ basis fordi $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Overgangsmatrise: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(4b.) $\{\frac{\vec{u}_1}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{u}_2}{\sqrt{2}}, \vec{v}_3 = [-1, -1, 1, 1]/2\}$ er en ortonormal basis for U.

(4c.) Nulliteten $= \dim(\ker T) = \dim\{\vec{x} \mid T\vec{x} = 0\}$

Rangen $= \dim T(V) = \dim\{\vec{y} \mid \vec{y} = T(\vec{x}),$ passe $\vec{x} \in V\}$

Relasjon: $\boxed{\text{rang}(T) + \text{nullitet}(T) = n}$

(4d.) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(4e.) Nullrom: Span$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Rekkevidden: Span$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Nullitet: 2

Rang: 3.

(4f.) Matrisen er $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Eksamen, mai 2002

1a. $A' = \begin{bmatrix}1&0&-3&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ er den reduserte trappeformen til A.

$\left\{\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ er basis for Nullrommet og for $R^{\perp}$ (som er Nullrommet)

1b. (i) Aldri (ii) $a \neq 5$ og ($a=5$ og $b=-2$) (iii) $a=5$, og $b \neq -2$,

2a. At $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er lin. uavh. og at $\text{Span}\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p\} = V$

2b. Ser at $\vec{b}_1 = \vec{c}_3 - \vec{c}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{c}_2$, og $\vec{b}_3 = \vec{c}_1 + \vec{c}_2 - \vec{c}_3$.

Derfor $V = \text{Span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} \subseteq \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$

Men opplagt at $\text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\} \subseteq \text{Span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = V$

så likhet her

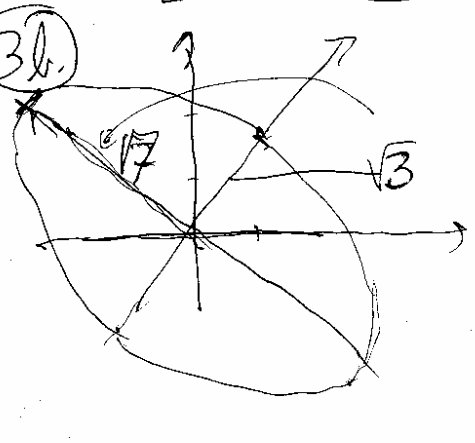
Dermed er $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ 3 uavh. vektorer som spenner et rom av dim 3, derfor en basis. Får: $Q = \begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$.

2c $T = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ **2d** D basis siden $\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$T_D = \begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

3a. $B = \left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}$ K er ellipse

3b.



FASIT, MAI 2002, FRTS.

(4a.) Egenvektor: $\vec{x} \neq 0$, så $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, passe $\vec{x}$.

λ-en som da figurerer, kalles egenverdi

A diag.bar betyr: $\exists$ $(n \times n)$-matrise P, slik at $P^{-1}AP = D$ er diagonal.

(4b.) $A\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$, så den tilhørende egenverdien er 1

A har 3 forskjellige egenverdier, og er derfor diagonaliserbar.

(4c) $P = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt6} & 0 & -1/\sqrt3\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, $P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

(4d) Det finnes P slik at $P^{-1}CP = B$. Dermed:

$|B - \lambda I| = |P^{-1}CP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}|\cdot|C - \lambda I|\cdot P = |C - \lambda I|$

så λ egenverdi for $B \iff |B - \lambda I| = 0 \iff |C - \lambda I| = 0 \iff$ λ egenverdi for D

(4e.) C, D symmetriske gir: $\exists P_1$ slik at

Samme D siden B og C har samme egenverdier

$P_1^T C P_1 = D$, og $P_2^T B P_2 = D$, for P_1, P_2 ortogonale og D diagonal.

Dermed: $\underbrace{P_2 P_1^T C P_1 P_2^T}_{} = (P_1 P_2^T)^T C\, P_1 P_2^T = Q^T C Q$

$\|$

$P_2 D P_2^T$ der $Q = P_1 P_2^T$

$\|$ pr. def.

B

og $Q^{-1} = (P_1 P_2^T)^{-1} = (P_2^T)^{-1} \cdot P_1^{-1} = P_2 P_1^T$

$= (P_1 P_2^T)^T = Q^T$

så Q ortogonal

H2000. Fasit m. kommentarer.

1a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2-3R_1 \\ R_3+2R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

B er den reduserte trappeformen til A. Av B følger at $\{(2,1,1,0), (-4,-2,0,1)\}$ er en basis for nullrommet til A.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 8 & a \\ -2 & 1 & a & -6 & b \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \quad 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & a-3 \\ 0 & -1 & a-2 & -2 & b+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & a-3 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & a+b-1 \end{bmatrix}$$

(i) Et lign.system med 3 ligninger og 4 ukjente har aldri akkurat en løsnin

(ii) Systemet har uendelig mange løsninger når $a \neq 3$ (en fri variabel), og når $a = 3$ og $b = -2$ (to frie variable).

(iii) Systemet har ingen løsning når $a = 3$ og $b \neq -2$.

2a) Kan vises på forskj. måter. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ viser at $\{u_1, u_2, u_3\}$ er lineært uavhengige. Tre lin. uavh. vektorer i $\mathbb{R}^3$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

$$\underset{S \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \underset{B \leftarrow S}{P} = \left(\underset{S \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

hvor vi har brukt algoritmen til å finne den inverse matrisen.

($e_1 = -u_1 + u_3$, $e_2 = u_1 - u_2$, $e_3 = u_1 + u_2 - u_3$ viser også at B er en basis og at $P = [[e_1]_B \; [e_2]_B \; [e_3]_B]$ er matrisen ovenfor.

b) $T(u_1 + u_2 - u_3) = T(u_1) + T(u_2) - T(u_3) = (2,1) + (0,1) - (1,1) = (1,1)$.

$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ er matrisen til T relativt til basisen B og standardbasisen. $T(v) = M[v]_B$. Siden $[v]_B = Pv$, blir altså $T(v) = MPv$.

Standardmatrisen A til T er derfor $A = MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Siden $A = [T(e_1) \; T(e_2) \; T(e_3)]$ og $e_1 = -u_1 + u_3$, $e_2 = u_1 - u_2$, $e_3 = u_1 + u_2 - u_3$ kunne vi funnet A direkte.)

3. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{r_1, r_2, r_3\}$ eller $\{u_1, u_2, u_3\}$ er basiser for W. $\dim W = 3$.

(Basisen $\{u_1, u_2, u_3\}$ kunne også vært funnet ved å skrive vektorene u_1, u_2, u_3, u_4 som søylevektorer, og så brukt rekkeope

b) $\left.\begin{array}{l} \dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = 7 \\ \dim \operatorname{Col} A = \dim W = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Nul} A = 4.$

H2000

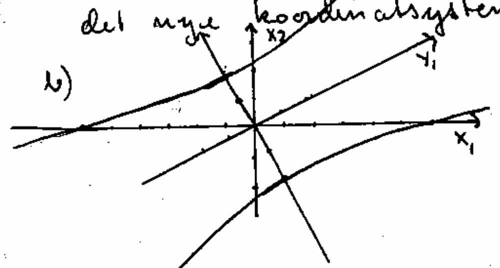
4 a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda+1)(\lambda-9)$. Siden vi har en positiv og en negativ rot, er kjeglesnittet K en hyperbel. Finner egenv.

$\lambda = -1$, $2x_1 - 4x_2 = 0$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $\lambda = -1$.

$\lambda = 9$, $-8x_1 - 4x_2 = 0$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ — " — $\lambda = 9$. (Denne kunne vi skrevet opp direkte siden de to egenv. er ortogonale.)

$\left\{ \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ slik at med substitusjonen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ blir K's ligning i det nye koordinatsystemet $-y_1^2 + 9y_2^2 = 36$.

b)



$\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$,

$-\left(\frac{y_1}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = 1$.

5 a) $AP = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Regningen i a) viser at $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er egenvektorer til A med egenverdier 1, 1 og 2.
Siden $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ er lineært uavhengige ($|\underline{u}_1\, \underline{u}_2\, \underline{u}_3| \neq 0$) danner de en basis for $\mathbb{R}^3$ og A er derfor diagonaliserbar.

c) Velger vi P som ovenfor og $\underline{b}_1 = \underline{u}_1$, $\underline{b}_2 = \underline{u}_2$, $\underline{b}_3 = \underline{u}_3$, blir $[T]_B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $[T(\underline{b}_1 + 3\underline{b}_3)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

d) (i) Hvis $E\underline{v} = \lambda\underline{v}$ med $\underline{v} \neq \underline{0}$, blir $C^{-1}EC(C^{-1}\underline{v}) = C^{-1}E\underline{v} = C^{-1}\lambda\underline{v} = \lambda C^{-1}\underline{v}$ og $C^{-1}\underline{v} \neq \underline{0}$ siden $\underline{v} \neq \underline{0}$.

(ii) Anta at E er diagonaliserbar og la P være slik at $P^{-1}EP = D$ (diagonalmatrise). Da er $P^{-1}CC^{-1}ECC^{-1}P = D$, altså $(C^{-1}P)^{-1}(C^{-1}EC)C^{-1}P = D$, som viser at $C^{-1}EC$ er diagonaliserbar.

(Kan også vises ved å la $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer for E, og vise at $\{C^{-1}\underline{v}_1, C^{-1}\underline{v}_2, \cdots, C^{-1}\underline{v}_n\}$ blir en basis for $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer for $C^{-1}EC$.)

V2000 Fasit

1a) $|A| = a+b-3$. A er invertibel $\iff a+b \neq 3$.

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ c) (i) $a+b \neq 3$ (ii) $a=5$ og $b=-2$
(iii) $a+b=3$ og $b \neq -2$.

d) $x_3 = \dfrac{|A_3(\underline{b})|}{|A|} = \dfrac{4}{1} = 4$.

2. a) $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}$ er lineært uavhengig og utspenner V.

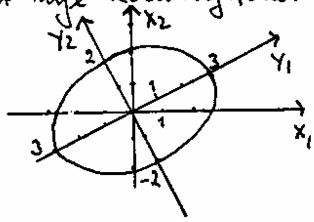
b) Vis f.eks. at $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ er lin. uavh. Siden $\dim V = 3$, danner de en basis for V.

$$P = \underset{C \leftarrow B}{P} = \left[[\underline{b}_1]_C \; [\underline{b}_2]_C \; [\underline{b}_3]_C\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Standardmatrisen til $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $[T]_D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3 a) $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$. Med $P = [\underline{b}_1 \; \underline{b}_2]$ og $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, blir K's ligning i det nye koord.systemet $4y_1^2 + 9y_2^2 = 36$. K er en ellipse.

b) $\left(\dfrac{y_1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2}{2}\right)^2 = 1$



4 a) Lærebok def. s.297 og s.314.

b) $E\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, (2,1,1) er egenvektor og 2 er tilhørende egenverdi

$|E - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Siden dimensjonen til egenrommet til $\lambda = 2$ er 1, er E ikke diagonaliserbar.

c) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ er en ortogonal matrise som diagonaliserer A. $P^{-1} = P^T$.

d) Det finnes ortogonale matriser P_1 og P_2 slik at $P_1^T A P_1 = D = P_2^T B P_2$ (D er diagonal med egenverdiene til A og B i hoveddiagonalen). Dette gir $(P_1 P_2^T)^T A (P_1 P_2^T) = B$. Sett $Q = P_1 P_2^T$. Siden P_1 og P_2^T er ortogonale, og produktet av to ortogonale matriser er en ortogonal matrise, er Q ortogonal.

H 99. Fasit m. kommentarer.

1 a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

B er den reduserte trappeform. (Mellomregningen skal vises på eksamen.)

b) $\{(2,1,0,0,0), (1,0,3,2,1)\}$.

c) Pivotsøylene i A danner en basis for søylerommet til A, altså første, tredje og fjerde søyle i A danner en basis for søylerommet til A. Dimensjonen er lik 3.

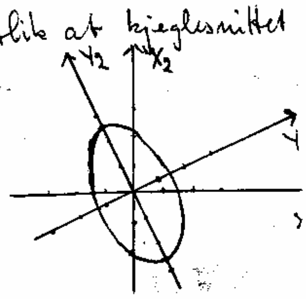
d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er som sagt en basis for Col A. Av denne basisen kan vi ved hjelp av Gram-Schmidts metode lage en ortogonal basis for Col A. Siden de to siste vektorene alt er ortogonale, kan vi bruke disse som de to første vektorene i den ortogonale basisen. $\{(0,0,1,0), (-1,2,0,2), (2/3, -1/3, 0, 2/3)\}$ er en ortogonal basis for Col A. (Også andre fåes ved G.S.s metode.)

2 a) $|M| = (a-b)^2$. M er invertibel $\Leftrightarrow$ $|M| \neq 0$.
M er invertibel $\Leftrightarrow$ $a \neq b$.

b) Av algoritmen til å beregne den inverse, eller av formelen for den inverse matrisen finner vi at
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ når $a = 1$ og $b = 2$.

3 a) $\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-7)(\lambda-2)$ viser at K er en ellipse

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$ er en ortonormal basis slik at kjeglesnittet kommer i standardposisjon. I det nye koordinatsystemet blir ligningen
$$7y_1^2 + 2y_2^2 = 14 \quad \text{eller} \quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1$$



H057
-99

3 c) $\begin{vmatrix} 6-\lambda & a \\ a & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 - a^2 = 0$ for $\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{9+4a^2}}{2}$

$9 + 4a^2 = 81 \iff 4a^2 = 72 \iff a = \pm\sqrt{18}$

Når $-\sqrt{18} < a < \sqrt{18}$, er begge røttene positive og K_a er en ellipse.

Når $a < -\sqrt{18}$ og $a > \sqrt{18}$, har røttene forskj. fortegn og K_a er en hyperbel.

Når $a = \pm\sqrt{18}$, er K_a to rette linjer.

4a) $T(1,1,1) = 1\cdot(1,1,1)$, $T(4,2,1) = 2(4,2,1)$, $T(9,3,1) = 3(9,3,1)$

b) Av a) ser vi at A har egenverdiene 1, 2 og 3 med tilhørende egenvektorer $t(1,1,1)$, $t(4,2,1)$ og $t(9,3,1)$ med $t \neq 0$. Siden A har tre forskjellige egenverdier, er A diagonaliserbar. *

c) Med basisen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\3\\1\end{bmatrix} \right\}$ blir $\mathcal{B}$-matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ til T diagonalmatrisen $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$. $[T(2\underline{u}_2 + \underline{u}_3)]_{\mathcal{B}} = [4\underline{u}_2 + 3\underline{u}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\4\\3\end{bmatrix}$.

d) $|E - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

$\begin{bmatrix}3&-5&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ viser at egenrommet til $\lambda = 1$ har dimensjon 1. E er derfor ikke diagonaliserbar.

e) Hvis H har fire forskjellige egenverdier, er H diagonaliserbar. *
Hvis H er diagonaliserbar og λ er en egenverdi til H, kan vi vise at egenrommet til λ har dimensjon 1. H må derfor ha fire forskjellige egenverdier hvis den er diagonaliserbar.

(Kan f.eks. vises direkte ved å se på $(H - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$. Dette lign. systemet har totalmatrise $\left[\begin{array}{cccc|c} a-\lambda & b & c & d & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & & 0 \end{array}\right]$.

Vi ser at for en gitt λ er $\{(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1)\}$ basis for egenrommet til λ. Vi kan direkte av matrisen se at egenr. til λ har dimensjon 1. Hvordan?)

* En $n \times n$ matrise med n forskjellige egenverdier er diagonaliserbar.

V99

1a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad x_1 = 2/5$, $x_2 = -1/5$, $\underline{x_3 = 0.}$

b) Lan har akkurat en løsning når determinanten til koeffisientmatrisen er $\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & b-6 & 0 \end{vmatrix} = -(a-6)(b-6) \neq 0 \quad \text{når } a \neq 6 \text{ og } b \neq 6.$$

c) La T være ligningssystemets totalmatrise.

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & a & 0 \\ 3 & b & 9 & ab \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \\ 0 & b-6 & 0 & ab \end{array}\right]$$

Vi ser at systemet har ingen løsning hvis og bare hvis $b-6=0$ og $ab \neq 0$.

Bruker vi resultatet i punkt b) får vi derfor at systemet har uendelig mange løsninger når $b=6$ og $a=0$ og når $b \neq 6$ og $a=6$.

(i) $b=6$ og $a=0$ $\quad T \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ gir $\underline{x_1 = -2t,\ x_2 = t,\ x_3 = 0,\ t \in \mathbb{R}}$

(ii) $\underline{b \neq 6 \text{ og } a = 6}$:

$$T \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-6 & 0 & 6b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6b/(b-6) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -\frac{12b}{b-6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6b}{b-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

gir $\underline{x_1 = -\frac{12b}{b-6} - 3t,\quad x_2 = \frac{6b}{b-6} \quad x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}.}$

2a) Mengden $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ danner en basis for V hvis $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ er lineært uavhengig og $V = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

b) $\mathcal{B}_a$ danner en basis for $\mathbb{R}^3$ hvis og bare hvis

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 \neq 0. \quad \mathcal{B}_a \text{ er altså basis for } \mathbb{R}^3 \text{ når } a \neq -1.$$

c) $\mathcal{B}_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\quad b_1 = (1,1,0),\ b_2 = (0,1,1),\ b_3 = (1,0,1)$

$S = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ \ e_3 = (0,0,1).$

Vi ser direkte at

$$e_1 = \tfrac{1}{2}b_1 - \tfrac{1}{2}b_2 + \tfrac{1}{2}b_3,\quad e_2 = \tfrac{1}{2}b_1 + \tfrac{1}{2}b_2 - \tfrac{1}{2}b_3,\quad e_3 = -\tfrac{1}{2}b_1 + \tfrac{1}{2}b_2 + \tfrac{1}{2}b_3$$

Hvis vi ikke hadde sett dette direkte, kunne vi funnet koordinatvektorene $[e_1]_{\mathcal{B}_1}$, $[e_2]_{\mathcal{B}_1}$ og $[e_3]_{\mathcal{B}_1}$ ved å løse tre ligningssystem samtidig:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

d) $\underset{S \leftarrow \mathcal{B}_1}{P} = \left[[b_1]_S\ [b_2]_S\ [b_3]_S\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $v = x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_1+x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix} = [v]_S$ hvor $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{B}_1}$

$[v]_S = 2[v]_{\mathcal{B}_1}$ gir $x_1 = x_2 = x_3$. Vektorene $v = \begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$ har

$[v] = [v]_S = 2[v]_{\mathcal{B}_1}$.

(Alternativt: $[v]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}[v]_{\mathcal{B}_1} = 2[v]_{\mathcal{B}_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}$

$\Rightarrow [v]_S = 2[v]_{\mathcal{B}_1}$.)

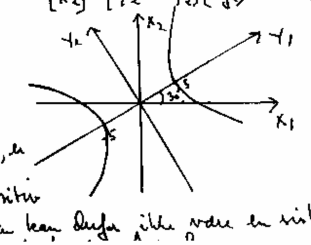
f) $V = \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (skrevet som radvektorer) er en undermengde av $\mathbb{R}^3$ som er lukket under addisjon og multiplikasjon med en skalar. V inneholder også nullvektoren. V er derfor et underrom av $\mathbb{R}^3$ og $\{(1,1,1)\}$ er en basis for V. Altså er dimensjonen til V lik 1.

3. a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 3 = (\lambda-2)(\lambda+2)$. Siden røttene har forskjellig fortegn er kjeglesnittet en hyperbel.

b) Den ortogonale substitusjonen $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ overfører kjeglesnittsligningen til

$2y_1^2 - 2y_2^2 = 50$

eller $\left(\frac{y_1}{5}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{5}\right)^2 = 1$.



c) Ikke sirkel hvis $A=0$. Hvis $A \neq 0$, er

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & A/2 \\ A/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + A^2/4) = 0$ for en positiv og en negativ λ. Kurven kan derfor ikke være en sirkel for

V99

4a) (i) Multiplisere en rekke med en konstant $\neq 0$. (ii) Bytte om to rekker. (iii) Addere et multiplum av en rekke til en annen.

b) En elementær matrise er en matrise som er fremkommet ved å utføre en elementær rekkeoperasjon på enhetsmatrisen I.

Eks. $n=2$ (i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) En triangulær matrise er en kvadratisk matrise som har bare nuller under (eller over) hoveddiagonalen (defineres i noen bøker som nedre triangulær; bare nuller over hoveddiagonalen øvre triangulær). Determinanten er produktet av leddene i hoveddiagonalen.

d) En matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk. De elementære matrisene av type (iii) ovenfor er ikke symmetriske og dermed ikke ortogonalt diagonaliserbare. De av type (i) og (ii) er ortogonalt diagonaliserbare.

e) De av type (i) og (ii) er ifølge d) diagonaliserbare. Vi må undersøke om noen som svarer til type (iii) er diagonaliserbar. La E være en slik matrise. $|E-\lambda I| = (1-\lambda)^n$ ifølge c) hvis E er $n \times n$. Alle egenverdiene er altså lik 1. Når vi skal finne egenrommet til 1 skal vi løse systemet $(E-I)\underline{X} = \underline{0}$. Hvis E er fremkommet ved å multiplisere rekke r_1 i I med $k \neq 0$ og addere denne til rekke r_2 så er $e_{r_2 r_1} = k$ og alle andre e_{ij} med $i \neq j$ er lik 0. (Vi har satt $E = [e_{ij}]$.) Derfor har matrisen $E-I$ kun ett element $\neq 0$. Hvis $(E-I)\underline{X} = \underline{0}$ og $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, er $x_{r_1} = 0$. Løsningsrommet har derfor dimensjon lik $n-1$ og E er ikke diagonaliserbar siden $\mathbb{R}^n$ ikke har noen basis av egenvektorer til E.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$, er de mulige elementære 2×2 matrisene vi har. Adderer vi to av samme type er det kun $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ som gir en elementær matrise.

To av forskjellig type kan bare gi en elementær matrise hvis vi har

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Altså: De elementære 2×2 matrisene $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ er de eneste som kan skrives som en sum av to elementære matriser.

H 98 Oppg. 1. Fasit m. kommentarer.

1a)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

B er den reduserte trappeformen.

(På eksamen skal mellomregninger vises.)

b) De tre förste rekkevektorene i B er lineært uavhengige og danner en basis for Row M (Row B = Row M). Dimensjonen til rekkerommet er 3.

c) Dimensjonen til söylerommet er også 3 og förste, fjerde og femte söylevektor i M danner en basis for söylerommet til M (pivotsöylene i M).

d) Av den reduserte trappeformen ser vi at vi har tre frie variable. Ved å löse ligningssystemet $M\underline{x} = \underline{0}$ finner vi fölgende basis for Nul M:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -17 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

H 97 Oppg. 1

a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi har en fri variabel x_3. $x_4 = 0$ og $x_1 = 3x_3$, $x_2 = -2x_3$.

Den generelle lösningen er $\underline{(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(3, -2, 1, 0), t \in \mathbb{R}}$.

(Dimensjonen til söylerommet er lik rangen til matrisen.)

Rangen til systemets koeffisientmatrise er 3.

b)
$$[A|\underline{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a & b & c \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & c-5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ligningssystemet er alltid lösbart når $a \neq 4$.

Når $a = 4$, må $c = 5$ for at systemet skal være lösbart.

c) Bruk av Cramers regel gir $\underline{x_2 = 11 - 2c}$.

(Bruker vi det gitte likningssystem finner vi at $|A| = 2$ og $|A_2(\underline{b})| = 22 - 4c$. Bruker vi det ekvivalente system får vi litt enklere regning.)

Fasit.

V97. 1a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(3,1,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) La A være koeff.matrisen. Første, andre og tredje søyle i A danner basis for Col A. Første, andre og tredje rekke danner basis for Row A.

2a) $\lambda \notin \{1,3\}$ b) -4 c) $\{(0,0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$ (også andre basiser).

3a) $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$ diagonaliserbar (ortogonalt) siden $A = A^T$.

b) $|A - \lambda \underline{I}| = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$. c) $s\begin{bmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{bmatrix}$ $s^2+t^2 \neq 0$ d) $\left\{\begin{bmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{bmatrix}\right\}$ er en ortogonal basis. Multipliser hver $\underline{v}$ med $\frac{1}{\|\underline{v}\|}$ og få en ortonormal basis.

4a) Læreboka. b) Bruk $T(c_1\underline{v}_1 + \cdots + c_n\underline{v}_n) = c_1T(\underline{v}_1) + \cdots + c_nT(\underline{v}_n)$ og $\text{Ker}\, T = \{\underline{0}\}$.

c) $\mathcal{B}'$ er basis d) $\mathcal{B}''$ ikke basis, $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0&-1&1 \\ 1&0&-1 \\ -1&1&0 \end{bmatrix}$, rang = 2, nullitet = 1

5. Anta B er en diagonaliserbar $p \times p$ matrise med en basis av egenvektorer $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p\}$ for $\mathbb{R}^p$. $B\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \Rightarrow B^n\underline{v}_i = \lambda_i^n \underline{v}_i$.
$I - B^n$ ikke inventibel $\Leftrightarrow \exists\, \underline{x} \neq \underline{0}$ $(B^n - I)\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow B^n$ har $\lambda = 1$ som egenverdi.
Hvis n er odde, er ingen av egenverdiene til B^n lik 1. Kan skje hvis n er jamn og $\lambda = -1$ er egenverdi til B.

6. Substitusjonen $\begin{bmatrix} x\\y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'\\y' \end{bmatrix}$ overfører ligningen til $11x'^2 + y'^2 = 4$.
Kjeglesnittet er en ellipse.

V96. a) $u \neq 0$ og $u \neq \pm\sqrt{2}$, $B_3^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 1&-3&8 \\ -3&9&-3 \\ 8&-3&1 \end{bmatrix}$ b)(i) $u \neq 0$ og $u \neq \pm\sqrt{2}$ (ii) $u = 0$ (iii) $\pm\sqrt{2}$.

2a) $\det A_s = 0$, $|A_s - \lambda I| = -\lambda(\lambda-2)^2$ b) $\{(1,0,-1)\}$, $\{(1,0,1), (0,2,1)\}$.

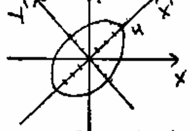
c) 0, 2 (dobbeltrot); $\underline{x} = t(1,0,-1)$ for $\lambda = 0$ og $\underline{x} = s(0,1,0) + t(1,0,1)$ for $\lambda = 2$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ er egenvektorene til A_0. A_s, $s \neq 0$, har egenvektorene $\underline{x} = t(1,0,-1)$ for $\lambda = 0$ og $\underline{x} = t(1,0,1)$ for $\lambda = 2$, $\underline{x} \neq \underline{0}$.

d) $\mathbb{R}^3$ har basis av egenvektorer for A_s kun når $s = 0$. A_0 er ortogonalt diagonaliserbar

e) $A_0 = 2^0 \cdot A = A$, $A^2 = 2A$ (direkte utregning). Anta $A^n = 2^{n-1}A$ for $n \geq 2$. Da er $A^{n+1} = 2^{n-1} A \cdot A = 2^n A$. Altså er $A^n = 2^{n-1}A$ vist ved induksjon. Kan også vises vha. $A = PDP^{-1}$, $A^n = PD^nP^{-1} = 2^{n-1}PDP^{-1}$

3. $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ en mulig orton. basis.

4. $\begin{bmatrix} x\\y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'\\y' \end{bmatrix}$ gir $3x'^2 + 7y'^2 = 48$



5. a) A standardmatrisen til T. $\text{Ker}\, T = \text{Nul}\, A$ og $R(T) = \text{Col}\, A$. $\dim \text{Col}\, A + \dim \text{Nul}\, A = 5$ er umulig hvis $\text{Nul}\, A = \text{Col}\, A$.

b) La $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n, \underline{b}_{n+1}, \ldots, \underline{b}_{2n}\}$ være basis for W. Definer $F : W \to W$ ved $F(\underline{b}_i) = \underline{0}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$; $F(\underline{b}_{n+i}) = \underline{b}_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$

$\text{Ker}\, F = \text{Span}\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots \underline{b}_n\} = R(F)$.

H95 nr 3

b) $a(x_1^2+x_2^2)+4x_1x_2+(a+2)\sqrt{2}(x_1+x_2)=0$

Vi skal dröfte hvilke nullpunktmengder ligningen har når parameteren a varierer over de reelle tall.
En ortogonal substitusjon $\underline{x}=P\underline{y}$, hvor söylevektorene i P danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ av egenvektorer til matrisen $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$, vil overföre ligningen over til en ligning i y_1 og y_2 uten "kryssledd" y_1y_2.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 2 \\ 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2-2^2 = (\lambda-a)^2-2^2 = (\lambda-(a+2))(\lambda-(a-2)) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

Fortegnet på $\lambda_1\lambda_2 = a^2-2^2$ avgjör hvilket kjeglesnitt vi får.
Hvis nullpunktmengden er et kjeglesnitt, får vi en ellipse når $\lambda_1\lambda_2>0$, en hyperbel når $\lambda_1\lambda_2<0$ og en parabel når $\lambda_1\cdot\lambda_2=0$.
Vi må diagonalisere for å få fullstendig svar:

$\lambda=a+2$, $-2x_1+2x_2=0$, egenvektor $\underline{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\lambda=a-2$, $2x_1+2x_2=0$, — " — $\underline{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1/\sqrt{2}\,y_1 - 1/\sqrt{2}\,y_2 \\ x_2 &= 1/\sqrt{2}\,y_1 + 1/\sqrt{2}\,y_2 \end{aligned}$$ gir ligningen

$$(a+2)y_1^2+(a-2)y_2^2+2(a+2)y_1=0,$$

$$(a+2)(y_1+1)^2+(a-2)y_2^2 = a+2.$$ Vi ser at vi får:

(i) En ellipse når $a>2$ og når $a<-2$.

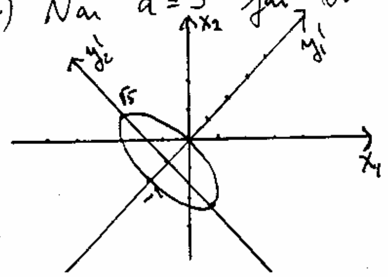
(ii) En hyperbel når $-2<a<2$.

Når $a=2$ får vi linjene $y_1+1=\pm1$, altså $y_1=0$ og $y_1=-2$

Når $a=-2$ får vi linjen $y_2=0$.

---

a) Når $a=3$ får vi ellipsen $\left(\frac{y_1+1}{1}\right)^2+\left(\frac{y_2}{\sqrt{5}}\right)^2=1$.



Med $y_1+1=y_1'$ og $y_2=y_2'$ får vi ligningen på standardform.
Figuren viser kjeglesnittet og de nye og gamle koordinataksene

H94 nr 5.

$$16x^2+9y^2-24xy+15x+20y+25=0$$

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-25\lambda=\lambda(\lambda-25)=0 \quad \text{for } \lambda=0 \text{ og } \lambda=25.$$

Hvis kjeglesnittet ikke er et "degenerert" kjeglesnitt, må det være en parabel.

Egenrommet til $\lambda=0$ er løsningsrommet til ligningssystemet med total matrise

$\left[\begin{array}{cc|c} 16 & -12 & 0 \\ -12 & 9 & 0 \end{array}\right]$, som overføres ved rekkeoperasjoner til $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Vi får at $\underline{v}_1=(3/5,\ 4/5)$ er en egenvektor av lengde 1.

Vektoren $\underline{v}_2=(-4/5,\ 3/5)$ er en basis for egenrommet til $\lambda=25$.

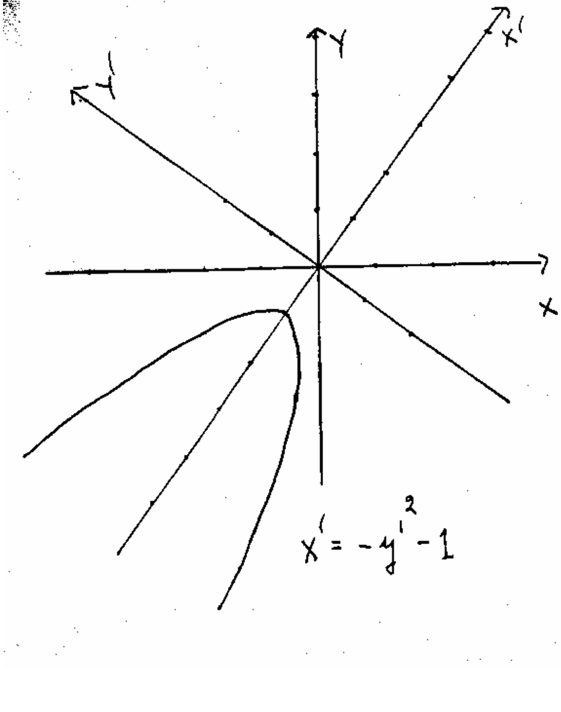
Variabelskiftet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x &= 3/5\,x' - 4/5\,y' \\ y &= 4/5\,x' + 3/5\,y' \end{aligned} \quad \text{gir}$$

$$0x'^2+25y'^2+15(3/5\,x'-4/5\,y')+20(4/5\,x'+3/5\,y')+25=0.$$

$$25y'^2+9x'-12y'+16x'+12y'+25=0$$

$$(x'+1)+y'^2=0.$$



Parabelen er tegnet inn sammen med de nye og de gamle koordinataksene. (Vi vet at variabelskiftet representerer en rotasjon av koordinataksene. Beliggenheten av x'-aksen finnes lett ved å sette $x'=1$, $y'=0$, eller et annet punkt på x'-aksen; $x'=5$ $y'=0$ gir $x=3$ $y=4$.)

H94 Oppg. 3.

a) $W = \text{Span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5\} = \text{Col}\,[\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3\ \underline{u}_4\ \underline{u}_5]$.

$$U = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3\ \underline{u}_4\ \underline{u}_5] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (För inn mellomregningene.)

Dette viser at $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ danner en basis for W. (Pivotsöylene i U danner en basis for söylerommet til U.)

b) $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5\}$ er lineært avhengig (dette följer av a) eller av det generelle resultat at 5 vektorer i $\mathbb{R}^4$ alltid er lineært avhengige). Det finnes derfor c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 som ikke alle er 0, slik at $c_1\underline{u}_1 + \cdots + c_5\underline{u}_5 = \underline{0}$. Siden T er lineær, er
$\underline{0} = T(\underline{0}) = T(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2 + \cdots + c_5\underline{u}_5) = c_1T(\underline{u}_1) + \cdots + c_5T(\underline{u}_5) = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$.
Selvmotsigelse. En slik T finnes altså ikke.
(Kan også vises på andre måter.)

V92 Oppg 2.

a) At $|M| = t^3 - 3t + 2 = (1-t)(2-t-t^2)$ vises ved å utvikle determinanten til M etter 2. eller 3. söyle. (Eller ved först å utföre rekkeoperasjoner på M.)

b) $|M| = (t-1)^2(t+2)$.
M er inverterbar $\Leftrightarrow |M| \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 1$ og $t \neq -2$.

c) rang + nullitet = 4 (rang M = dim Col M og nullitet til M = dim Nul M).

Når $t \neq 1$ og $t \neq -2$ er rang $M = 4$ og nulliteten til $M = 0$.

Når $t = 1$ er $M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, som viser at rang $M = 2$ og nulliteten til $M = 2$.

Når $t = -2$ er $M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, som viser at rang $M = 3$ og nulliteten til $M = 1$