MAT 121, H. 2004, Løsningsskisse

1a) M har en invers fordi $\det M = 1 \neq 0$. Da er $\dim \operatorname{Row} M = 3$, $\dim \operatorname{Col} M = 3$ siden M er en 3×3-matrise.

b) Invers til A ved rekkeoperasjoner: Rekkereduser $A|I$ til $I|B$. Da vil B være A^{-1}. Ved Cramers formel: $AX = I$ svarer til $AX_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, $AX_2 = \begin{matrix}0\\1\\\vdots\\0\end{matrix}$, ..., $AX_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, der $X_1, X_2, \dots X_n$ er søylene i X. Disse ligningssettene løses ved Cramers formel. Begge metodene gir, som ventet, det samme.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

2a) A_a rekkereduseres til $\begin{bmatrix}1 & 2 & a-1\\ 0 & 4-2a & -a^2+a+2\\ 0 & 0 & -a^2-2a+8\end{bmatrix}$

som har samme determinant (på fortegnet nær) som A_a og samme rang. $|\det A_a| = 2|(a-2)(a^2+2a-8)|$ $= 2(a-2)^2(a+4)$. Skal rangen være 1, som er mindre enn 3 (A_a er en 3×3-matrise) må $\det A = 0$ altså $a = 2$ eller $a = -4$. A_2 rekkereduseres til $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ som har 1 pivotelement, altså rang 1.

A_{-4} rekkereduseres til $\begin{matrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 12 & 14\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}$ og får altså rang 2.

Derfor har bare A_2 rang 1. Vi får aldri rang 0 siden vi har minst ett pivotelement i alle tilfelle, og aldri rang 4 siden vi har høyst 3 piv.el.. Rang 3 får vi altså når $a \neq 2$, $a \neq -4$

2b) Et lineært ligningssett med like mange ukjente som ligninger har akkurat én lösning når koeffisientmatrisen har determinant $\neq 0$. $L_{a,b}$ har koeffisientmatrise A_a fra a), og vi vet fra a) at $\det A_a \neq 0$ når $a \neq 2$, $a \neq -4$. Altså: én lösning for alle $L_{a,b}$ med $a \neq 2$, $a \neq -4$, og bare disse.

Rekkereduserer vi A_a med tillagt söyle $\begin{bmatrix}1\\2\\b\end{bmatrix}$, som i a) får vi, for $a = 2$, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-3\end{bmatrix}$ og, for $a = -4$,

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 12 & -18 & 6\\ 0 & 0 & 0 & b+3\end{bmatrix}$$

. Vi vet at settet er konsistent hvis og bare hvis ingen rekke i matrisen, når den er på trappeform har formen $0\,0 \ldots 0\,c$, med $c \neq 0$. (s. 24). Altså har $L_{a,b}$ ingen lösninger når $a = 2, b \neq 3$. Og når $a = -4, b \neq -3$. Uendelig mange lösninger fåes altså for $a = 2, b = 3$ og $a = -4, b = -3$. I förste tilfelle blir lösningen $x = 1 - 2s - t$, $y = s$, $z = t$ der s og t kan velges fritt. I annet tilfelle blir den $x = 4s$, $y = \frac{1}{2} + 3s$, $z = 2s$, der s kan velges fritt

3a) $\{v_1, \ldots, v_p\}$ er lineært uavhengig hvis ligningen $c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p$ bare har lösningen $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$

b) Er $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_q}\}$ lineært avhengig, altså

$$c_{i_1} v_{i_1} + \ldots + c_{i_q} v_{i_q} = 0, \text{ med } (c_{i_1}, \ldots, c_{i_q}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

lar vi $j_1, \dots, j_r$ være de $p-q$ andre tallene i $\{1, 2, \dots, p\}$. Setter vi $c_{j_1} = c_{j_2} = \dots = c_{j_r} = 0$, vil ligningen $c_{i_1} v_{i_1} + \dots + c_{i_q} v_{i_q} + c_{j_1} v_{j_1} + \dots + c_{j_r} = 0$ ved omstokking av addendene gi en lineær avhengighet for $v_1, v_2, \dots, v_p$. Derfor kan ikke $v_{i_1}, \dots, v_{i_q}$ være lineært avhengige når $v_1, \dots v_p$ er lineært uavhengige

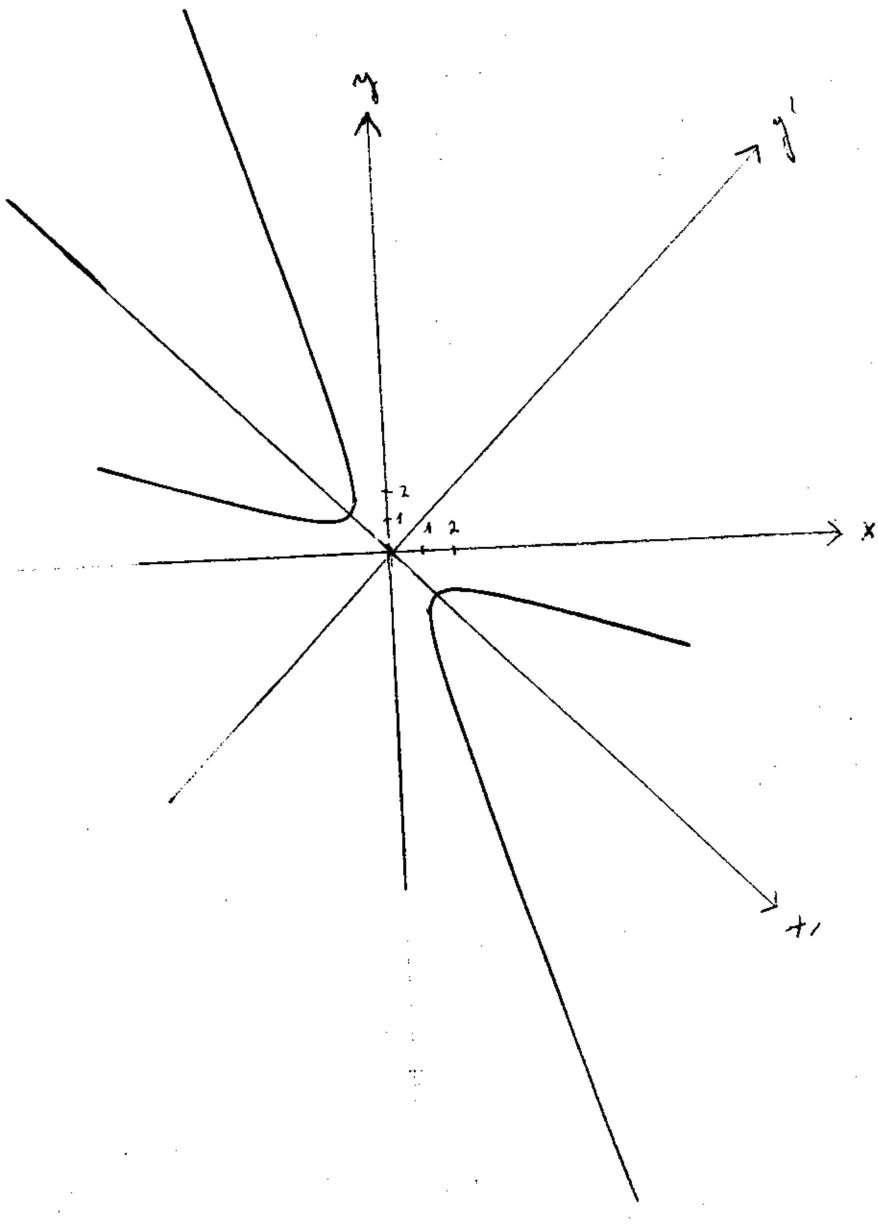
c) En basis for V er lineært uavhengig, mens

$$1 \cdot (v_1 - v_2) + 1 \cdot (v_2 - v_3) + 1 \cdot (v_3 - v_4) + 1 \cdot (v_4 - v_1) = 0$$

viser at de fire vektorene ikke er en basis. Vektorene $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$ og $v_3 - v_4$ spenner ut det samme rommet, V, som de fire vektorene $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$ og $v_4 - v_1$ spenner ut, siden $v_4 - v_1 = (-1)(v_1 - v_2) + (-1)(v_2 - v_3) + (-1)(v_3 - v_4)$.
De vil derfor være en basis for V hvis de er lineært uavhengige. Det er de, for $c_1(v_1 - v_2) + c_2(v_2 - v_3) + c_3(v_3 - v_4) = 0$ gir at $c_1 v_1 + (c_2 - c_1) v_2 + (c_3 - c_2) v_3 - c_3 v_4 = 0$ som igjen gir $c_1 = c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = -c_3 = 0$ siden v_1, v_2, v_3, v_4 er lineært uavhengige. Derfor blir $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Siden de tre vektorene er en basis for V blir dimensjonen til V $\underline{3}$.

4a) Vi finner egenverdiene -2 og 8 til den tilsvarende symmetriske matrise $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. De tilsvarende normerte egenvektorer er $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]^T$ og $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]^T$. Velges $+$ begge steder blir ligningen for K i det nye koordinatsystemet $-2x'^2 + 8y'^2 = -8$, altså, bedre; $x'^2 - 4y'^2 = 4$.

b) K er en hyperbel siden egenverdiene har motsatt fortegn.



5a) Når et matriseprodukt $B\mathcal{C}$ er definert er antall søyler i B lik antall rekker i $\mathcal{C}$. Settes $B = \mathcal{C} = A$ blir da $n = m$. Videre er generelt $\det(B\mathcal{C}) = \det B \cdot \det \mathcal{C}$, slik at $\det A = \det A^2 = (\det A)^2$. Nå er enten $\det A = 0$ eller $\det A \neq 0$. I siste tilfelle kan vi dividere med $\det A$ og får $\det A = \frac{\det A}{\det A} = 1$. $\det A$ blir altså enten 0 eller 1.

b) La $y > 0$. $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} x^2+y^2, & xy+yz \\ yx+zy, & y^2+z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

gir $x^2+y^2 = x$, $(x+z)y = y$, $y^2+z^2 = z$. Dette gir $\underline{y = \sqrt{x-x^2}}$, og (siden $y \neq 0$) $\underline{z = 1-x}$. Vi ser at den tredje ligningen også er oppfylt, idet $(\sqrt{x-x^2})^2 + (1-x)^2 = x - x^2 + 1 - 2x + x^2 = 1 - x = z$.

Er $y < 0$ får vi på tilsvarende måte $y = -\sqrt{x-x^2}$, $z = 1-x$. I begge tilfelle må vi ha $0 \leqq x \leqq 1$ siden vi opererer med reelle tall slik at $x - x^2$ må være $\geqq 0$.

Er $y = 0$ får vi $x^2 = x$, $0 = 0$, $z^2 = z$ ved å sette $y = 0$ inn i ligningene over. Dette gir matrisene $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) En symmetrisk matrise er positiv definit hvis og bare hvis alle egenverdiene er > 0. Matrisen $\begin{bmatrix} x & \sqrt{x-x^2} \\ \sqrt{x-x^2} & 1-x \end{bmatrix}$ har egenverdier gitt ved ligningen $(x-\lambda)(1-x-\lambda) - (x-x^2) = 0$, altså $\lambda^2 - \lambda = 0$, så egenverdiene er 0 og 1. Likedan når $y = -\sqrt{x-x^2}$. Så disse matrisene er ikke positiv definite. Er $y = 0$ ser vi av matrisen ovenfor at bare $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ er positiv definit.