Løsninger til deleksamen i MAT 121, torsdag 18. mars 2004

Oppgave 1

(a) $\det A = 2.3 - 1.5 = 1$, og $\det B = 2.10 - 5.4 = 0$, og

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2.\det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = 6 - 2(12-15) - 10 = 2.$$

Av determinantverdiene ser vi at A og C er invertible, mens B ikke er det.

(b) Vi rekkereduserer $[M|I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, og får suksessivt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [I|M^{-1}].$$

Dermed: $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Eller, Metode 2: $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Oppgave 2

(a) Vi rekkereduserer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

og deretter

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

så svaret er: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$.

(b)

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} = (25-12) - 2(10-6) - 1(12-15) = 8,$$

og $\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 5(25-12) - 2(35-14) - 1(42-35) = 16,$

så $x_1 = \frac{16}{8} = 2$.

Oppgave 3

$A^{-1} = \frac{1}{2.(-3)-3.5}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, og $A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 3.8-3.1 \\ 5.8+1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dermed: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, så $x_1 = 1$, og $x_2 = 2$.

Oppgave 4

(a) Vi ser at $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 7 \neq 0$ og $\det\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \neq 0$, så M_1 er lineært uavhengig, mens M_2 ikke er det.

Videre: M_3 er ikke lineært uavhengig, siden den er en mengde av 3 vektorer i $\mathbf{R}^2$. Generelt er en mengde av M vektorer i $\mathbf{R}^N$ lineært avhengig hvis $M > N$.

(b) **(i)** Ja.

(ii) Nei. Origo er ikke med, så ikke noe null-element.

(iii) Ja.

(iv) Nei. Ikke lukket for addisjon: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ som ikke ligger på parabelen.

Oppgave 5

$\dim Col(A) + \dim Nul(A) = 6$ som er antall kolonner i A. Siden en basis for $Nul(A)$ inneholder to vektorer, har vi $\dim Nul(A) = 2$. Dermed $\dim Col(A) = 6 - \dim Nul(A) = 6 - 2 = 4$, som er svaret.