Løsninger for eksamen i MAT 121 - Lineær algebra
og M102 - Lineær algebra, fredag 28. mai 2004,

Oppgave 1

(a) Finn determinanten til matrisen

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & s \end{bmatrix},$$

uttrykt ved s, og bruk dette til å avgjøre for hvilke s matrisen M_s er invertibel. Finn inversen til matrisen M_2.

<u>**Svar:**</u> $\det M_s = 1.1.s = s$ siden matrisen er triangulær. Matrisen er invertibel hvis og bare hvis determinanten er ulik 0, dvs. s ulik null.

Vi har: $M_2^{-1} = \frac{(cof M_2)^T}{\det M_2} = \frac{1}{2}(cof M_2)^T$. Vi har: $cof M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så

$$M_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) La $B = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at B er en basis for vektorrommet $\mathbf{R}^3$. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Finn $[\mathbf{v}]_B$.

<u>**Svar:**</u> Vi vet at tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbf{R}^3$ utgjør en basis for $\mathbf{R}^3$. De tre vektorene er uavhengige hvis og bare hvis matrisen med de tre som kolonnevektorer har determinant ulik null. Denne matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

gjenkjenner vi som M_2, med determinant lik 2 som er ulik null. Dermed utgjør de tre vektorene en basis.

Vi har: $P_B[\mathbf{v}]_B = \mathbf{v}$, og her har vi $P_B = M_2$, så

$$[\mathbf{v}]_B = M_2^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

(a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, og finn de tilhørende egenvektorene.

<u>**Svar:**</u> Det karakteristiske polynomet til A er det $\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24$. Dette er null hvis og bare hvis $\lambda = 4$ eller $\lambda = 6$.

Videre: $E(4)$ er gitt ved

$$5x_1 - x_2 = 4x_1$$

$$-x_1 + 5x_2 = 4x_2,$$

som gir $x_1 = x_2$. Videre: $E(6)$ er gitt ved

$$5x_1 - x_2 = 6x_1$$

$$-x_1 + 5x_2 = 6x_2,$$

som gir $x_1 = -x_2$. Dermed: Egenvektorene til 4 er $\{t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, der t er ulik null, og egenvektorene til 6 er $\{t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$, der t er ulik null.

(b) Vi har gitt kjeglesnittet C med ligning

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 24.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at ligningen til C i det nye aksesystemet (med utgangspunkt i denne basisen) er uten kryssledd. Avgjør hva slags kjeglesnitt C er, og tegn en figur der du viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og kurven C.

<u>**Svar:**</u> Vi ser at ligningen har formen $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, der $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, som er matrisen fra del a). I tråd med teorien fra boka skifter vi da til koordinatsystemet spent ut av de to egenvektorene $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (enhetsvektorer hentet fra $E(4)$ og $E(6)$). Disse står normalt på hverandre og har lengde 1. Ligningen for C blir da:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 24,$$

dvs.

$$4y_1^2 + 6y_2^2 = 24.$$

Vi ser at dette blir en ellipse med halvakse med lengde $\sqrt{6}$ langs linja med ligning $x_1 = x_2$ og 2 langs linja med ligning $x_1 = -x_2$.

Oppgave 3

(a) Studer matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

og avgjør uten regning om A er diagonaliserbar. Finn deretter det karakteristiske polynomet for A, og vis at $\lambda = 1$ og $\lambda = 4$ er egenverdier for A.

Svar: Matrisen er symmetrisk, så derfor ortogonalt diagonaliserbar, og derfor diagonaliserbar. Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((\lambda-2)^2-1) - (1.(2-\lambda)-1) + (1.1-(2-\lambda)) =$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4.$$

Vi kaller dette polynomet $p(\lambda)$. Da ser vi:
$p(1) = -1^3 + 6.1^2 - 9.1 + 4 = 0$, og $p(4) = -4^3 + 6.4^2 - 9.4 + 4 = 0$. Dermed er både 1 og 4 røtter i det karakteristiske polynomet $p(\lambda)$, og derfor egenverdier for A.

(b) Vis at $\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ utgjør en basis for egenrommet til egenverdien 1 for A, og finn en ortogonal basis for dette egenrommet.

Svar: $E(1)$ er gitt ved $A\mathbf{x} = 1.\mathbf{x}$, dvs.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = x_1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = x_2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = x_3,$$

dvs.: Planet med ligning: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vi ser at både $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i dette planet, ved innsetting av koordinatene til vektorene. $E(1)$ er et plan, dvs. et undervektorrom av $\mathbf{R}^3$ av dimensjon 2, siden vi for det første har har to uavhengige vektorer der (vi ser at de to gitte vektorene er uavhengige, siden ingen av dem er en konstant ganger den andre). Dermed er dimensjonen minst 2. For det andre kan vi ikke ha tre uavhengige vektorer der, for da ville $E(1)$ vært hele $\mathbf{R}^3$, og det er det ikke, siden ikke alle punkter tilfredsstiller $x_1+x_2+x_3 = 0$. Altså har $E(1)$ dimensjon lik 2. Vi har sett at vi har to uavhengige vektorer i et vektorrom av dimensjon 2. Disse vil da utgjøre en basis for vektorrommet.

Metode 2: Løser ligningen: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ på standard måte: Det gir:

$$x_1 = -x_2 - x_3,$$

$$x_2 = x_2,$$
$$x_3 = x_3.$$

Kaller x_2 for s og x_3 for t. Dermed får vi

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som generell løsning. Siden vektorene er uavhengige og spenner løsningsrommet, utgjør de en basis for det.

Kaller de to vektorene for $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ Ortogonal basis for egenrommet: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, der $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, og $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 . \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_2 . \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D, slik at $A = PDP^T$.

<u>**Svar:**</u> Her må vi bygge opp en matrise med kolonnevektorer som utgjør en ortonormal basis av egenvektorer. Vi har to ortogonale fra $E(1)$. Vi normerer disse og får:

$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Egenrommet $E(4)$ er gitt ved:

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4x_1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4x_2$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 4x_3.$$

Vi rekkereduserer og får: $x_1 = x_3$, og $x_2 = x_3$, så $E(4) = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, og en vektor av lengde 1 er da $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Vi får da etter vanlig prosedyre:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ og } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

Vi studerer vektorrommet $P_2 = \{$ polynomer $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, for reelle $a_0, a_1, a_2\}$.

(a) Vi lar $S = \{1, t, t^2\}$ være standardbasisen for P_2. La lineæravbildningen T være definert som

$$T(p(t)) = tp'(t).$$

Finn matrisen $[T]_S$, og finn dimensjonen til billedrommet (også kalt "rekkevidden", engelsk: "range") til T.

<u>**Svar:**</u> Vi har: $[T]_S = [[T(1)]_S | [T(t)]_S | [T(t^2)]_S]$. Videre: $T(1) = t.0 = 0 = 0.1 + 0.t + 0.t^2$, og $T(t) = t.1 = 0 = 0.1 + 1.t + 0.t^2$, og $T(t^2) = t.2t = 0 = 0.1 + 0.t + 2.t^2$. Det gir:

$[T]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Vi ser at billedrommet inneholder de to lineært uavhengige elementene $t = T(t)$ og $2t^2 = T(t)$. Dermed er dimensjonen av billedrommet minst 2. Derfra og videre kan en argumentere på ulike måter.

En måte er å si: $T(p) = T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 T(1) + a_1 T(t) + a_2 T(t^2) = a_1 t + 2a_2 t^2$, så t og t^2 spenner også billedrommet. I tillegg er de lineært uavhangige fordi $c_1 t + c_2 t^2$ er nullpolynomet bare hvis $c_1 = c_2 = 0$. Siden elementene er uavhengige og spenner rommet, utgjør de en basis.

En annen, mer abstrakt måte, er som følger: Hele rommet har dimensjon 3, så hvis dimensjonen til billedrommet er 3, må det være hele rommet. (for da må det inneholde tre lineært uavhengige elementer, og i så fall vil det inneholde en basis for hele rommet, og defor være hele rommet). Men det er det ikke, for alle elementer i billedrommet er delelig med t, så de ser ut som $a_1 t + a_2 t^2$. Polynomer med konstantledd ulik null er da ikke med i billedrommet. Altså har billedrommet dimensjon høyst 2. Det har dimensjon minst 2 siden det inneholder de to uavhengige elementene t og t^2, argumentasjon som ovenfor.

Alternativt kan en studere rangen til $[T]_S$, som er 2.

Alternativt kan en studere dimensjonen til kjernen som er 1, og argumentere for at rangen til billedrommet blir $3 - \dim kerT = 3 - 1 = 2$.

(b) La indreproduktet $<,>$ på P_2 være gitt ved

$$< p(t), q(t) >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Vis at polynomet t står ortogonalt (med hensyn på $<,>$) på begge de to andre polynomene i standardbasisen, og finn en ortogonal basis (med hensyn på $<,>$) for vektorrommet P_2.

Svar: Vi har: $< t, 1 >= (-1).1 + 0.1 + 1.1 = 0$,, og $< t, t^2 >= (-1).(-1)^2 + 0.0^2 + 1.1^2 = 0$, så t står ortogonalt på både 1 og t^2.

Ortogonal basis får vi slik: Sett $x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2$. Gram-Schmidt-prosessen gir: $u_1 = x_1 = 1$, og $u_2 = x_2 - \frac{<x_2,x_1>}{<x_1,x_1>}.x_1 = x_2 = t$, siden $< x_2, x_1 >= 0$. Videre: $u_3 = x_3 - \frac{<x_3,x_1>}{<x_1,x_1>}.x_1 - \frac{<x_3,x_2>}{<x_2,x_2>}.x_2 = t^2 - \frac{<t^2,1>}{<1,1>}.1 - 0 = t^2 - \frac{(-1)^2.1+0^2.1+1^2.1}{1^2+1^2+1^2}.1 = t^2 - \frac{2}{3}$.

Dermed blir svaret for eksempel: En ortogonal basis er: $\{1, t, t^2 - \frac{2}{3}\}$.

(c) Hvorfor er ikke

$$[p(t), q(t)] = p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

noe indreprodukt på vektorrommet P_2 ?

Er

$$[p(t), q(t)] = p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

et indreprodukt på vektorrommet P_1 av polynomer av grad høyst 1 ? Begrunn svaret.

Svar: Sett $p(t) = (t-1)(t-2) = 2 - 3t + t^2$. Da er $p(t)$ med i vektorrommet P_2 og ulik nullelementet der, og vi har:

$$[p(t), p(t)] = p(1)^2 + p(2)^2 = 0^2 + 0^2 = 0.$$

Dette strider mot Aksiom 4 for indre produkter, og $[,]$ blir da ikke noe indreprodukt p P_2.. Aksiomene $(1)-(3)$ er opplagt OK på P_2. Når vi restrikterer til undervektorrommet P_1, holder aksiomene $(1)-(3)$ akkurat som for P_2. Men nå holder Aksiom 4 også, for hvis $[p(t), p(t)] = p(1)^2 + p(2)^2 = 0$, må vi ha $p(1) = p(2) = 0$. Men et polynom av grad mindre eller lik n har $n+1$ nullpunkter bare hvis polynomet er identisk lik 0, så et element i P_1, det vil si polynom av grad mindre eller lik 1, har 2 nullpunkter bare hvis polynomet er identisk lik 0. Dermed får vi $[p(t), p(t)] = 0$ bare hvis $p(t) = 0$. I tillegg ser vi lett at $[p(t), p(t)] \geq 0$ for alle $p(t)$. Dermed holder også Aksiom 4.

NB. OPPGAVE 5 ER BARE FOR M102, IKKE FOR MAT 121.

Oppgave 5

Vi studerer det lineære ligningssystemet

$$tx_1 + x_2 = t,$$
$$x_1 + tx_2 + x_3 = t,$$
$$x_2 + tx_3 = t.$$

Avgjør for hvilke reelle tall t dette systemet har (i) nøyaktig en løsning (ii) uendelig mange løsninger (iii) ingen løsning.

Svar: Ligningssystemet har formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der
$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$. Vi ser at det $A = t(t^2-1) - 1(t-0) = t(t^2-2)$. Dette er null hvis og bare hvis ($t = 0$ eller $t = -\sqrt{2}$, eller $t = \sqrt{2}$). Dermed: Vi får entydig løsning hvis og bare hvis t ikke er med i mengden $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

Videre: For $t = 0$ får vi: $x_2 = 0$ og $x_2 + x_3 = 0$, dvs. uendelig mange løsninger: $\{s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. For $t = \sqrt{2}$ og $t = -\sqrt{2}$ rekkereduserer vi det inhomogene ligningssystemet, og får en rad nederst med bare nuller, unntatt det nedre høyre hjørnet. Dermed: Ingen løsninger for $t = \sqrt{2}$ og $t = -\sqrt{2}$.