Nynorsk

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet.
Slutteksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra og M102 - Lineær algebra
Fredag 28. mai 2004, kl. 09-13 for MAT 121 og kl. 09-14 for M102.

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator.
Oppgåvesettet er på 3 sider. Eksamen i MAT 121 er Oppgåve 1-4 og finst på dei to første sidene, medan eksamen i M102 er heile settet, Oppgåve 1-5.

Oppgåve 1

(a) Finn determinanten til matrisa

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & s \end{bmatrix},$$

uttrykt ved s, og bruk dette til å avgjere kva for s som gjer matrisa M_s invertibel. Finn inversen til matrisa M_2.

(b) La $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at B er ein basis for vektorrommet $\mathbf{R}^3$. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Finn $[\mathbf{v}]_B$.

Oppgåve 2

(a) Finn eigenverdiane til matrisa $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, og finn dei tilhøyrande eigenvektorane.

(b) Vi har gjeve kjeglesnittet C med likning

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 24.$$

Finn ein ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at likninga til C i det nye aksesystemet (med utgangspunkt i denne basisen) er utan kryssledd. Avgjer kva slags kjeglesnitt C er, og teikn ein figur der du viser dei opprinnelege koordinataksane, dei nye, og kurva C.

Oppgåve 3

(a) Studer matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

og avgjer utan rekning om A er diagonaliserbar. Finn deretter det karakteristiske polynomet for A, og vis at $\lambda = 1$ og $\lambda = 4$ er eigenverdiar for A.

(b) Vis at $\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ er ein basis for eigenrommet til eigenverdien 1 for A, og finn ein ortogonal basis for dette eigenrommet.

(c) Finn ei ortogonal matrise P og ei diagonal matrise D, slik at $A = PDP^T$.

Oppgåve 4

Vi studerer vektorrommet $P_2 = \{$ polynom $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, for reelle $a_0, a_1, a_2\}$.

(a) Vi lar $S = \{1, t, t^2\}$ vere standardbasisen for P_2. La lineæravbildinga T vere definert som

$$T(p(t)) = tp'(t).$$

Finn matrisa $[T]_S$, og finn dimensjonen til biletrommet (også kalt “rekkjevidda”, engelsk: “range”) til T.

(b) La indreproduktet $<,>$ på P_2 vere gjeve slik:

$$< p(t), q(t) >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Vis at polynomet t står ortogonalt (med omsyn på $<,>$) på båe dei to andre polynoma i standardbasisen, og finn ein ortogonal basis (med omsyn på $<,>$) for vektorrommet P_2.

(c) Kvifor er ikkje

$$[p(t), q(t)] = p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

noko indreprodukt på vektorrommet P_2 ?

Er

$$[p(t), q(t)] = p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

eit indreprodukt på vektorrommet P_1 av polynom av grad høgst 1 ? Grunngjev svaret.

NB. OPPGAVE 5 ER BERRE FOR M102, IKKJE FOR MAT 121.

Oppgåve 5

Vi studerer det lineære likningssystemet

$$
\begin{aligned}
tx_1 + x_2 &= t,\\
x_1 + tx_2 + x_3 &= t,\\
x_2 + tx_3 &= t.
\end{aligned}
$$

Avgjer kva for reelle tal t som er slik at dette systemet har (i) eksakt ei løysing (ii) uendeleg mange løysingar (iii) inga løysing.

Hans Brodersen　　　Arne Stray　　　Trygve Johnsen