Løsning av eksamen i MAT 121

28/9 - 2005

1a Settet har form:

$$A_s\vec{x} = \vec{b}, \text{ der } A_s = \begin{bmatrix} 1 & s & 2 \\ 1 & s & 1 \\ s & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_s = 1(s-1) - s(1-s) + 2(1-s^2)$$
$$= s - 1 - s + s^2 + 2 - 2s^2 = \underline{1-s^2}$$

Dette gjør at systemt har nøyaktig én løsning hvis og bare hvis $\det A_s \neq 0$, dvs $s \neq 1$ og -1.

Hvis $s=1$, får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvis $s=-1$, får vi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Det gir: Uendelig mange løsninger for $s=1$, og Ingen løsninger for $s=-1$. (p.g.a)

For $s=1$ får vi: $x_3 = 1$, $x_1 = 1 - x_2$.

b.) $S = 0$ thì:

$$x_1 + \quad 2x_3 = 3$$
$$x_1 + \quad x_3 = 2$$
$$x_2 + x_3 = 2.$$

Đặt thì: $\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1,$$

Đvậy: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

2.a. Vi rekkereduserer III

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får ledende 1-ere i kolonne 1 og 2.
Dimensjonen både til kolonnerommet og rekkerommet er da 2. Dimensjonen til nullrommet er $4 - 2 = 2$.
En basis for kolonnerommet er gitt ved å ta de to kolonnene i A svarende til plassene med ledende 1-ere.

Svar: En basis for kolonnerommet er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

2b (i) Feil. $\mathbb{R}^2$ har basisen $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, men også $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$.

(ii) Riktig.

(iii) Feil. Hvis $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$ er billedrommet bare x-aksen, som har dimensjon 1, mens $\mathbb{R}^2$ har dimensjon 2.

(iv) Feil. Hvis M er 1. kvadrant, dvs $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \middle| x>0, y>0\right\}$ da er M slik som beskrevet, men M er <u>ikke</u> noe underdvektorrom

3a Egenverdiene til A finner vi slik

$$\det\begin{bmatrix}13-\lambda & -5\\ -5 & 13-\lambda\end{bmatrix} = (13-\lambda)^2-25 = \lambda^2-26\lambda+144=0$$

$$\lambda = \frac{26 \pm \sqrt{676-144\cdot 4}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{26\pm 10}{2}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 8 \text{ eller } \lambda = 18}}$$

$\lambda = 8$ gir:

$$\left.\begin{aligned}(13-8)x + (-5)y &= 0\\ -5x + (13-8)y &= 0\end{aligned}\right\} \iff x = y$$

Egenvektorene, svarende til $\lambda = 8$ blir

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{der } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\lambda = 18$ gir: $$\left.\begin{aligned}(13-18)x + (-5y) &= 0\\ -5x + (13-18)y &= 0\end{aligned}\right\} \iff$$

$$x = -y.$$

Egenvektorene svarende til $\lambda = 18$ blir:

$$\left\{ t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \text{ der } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

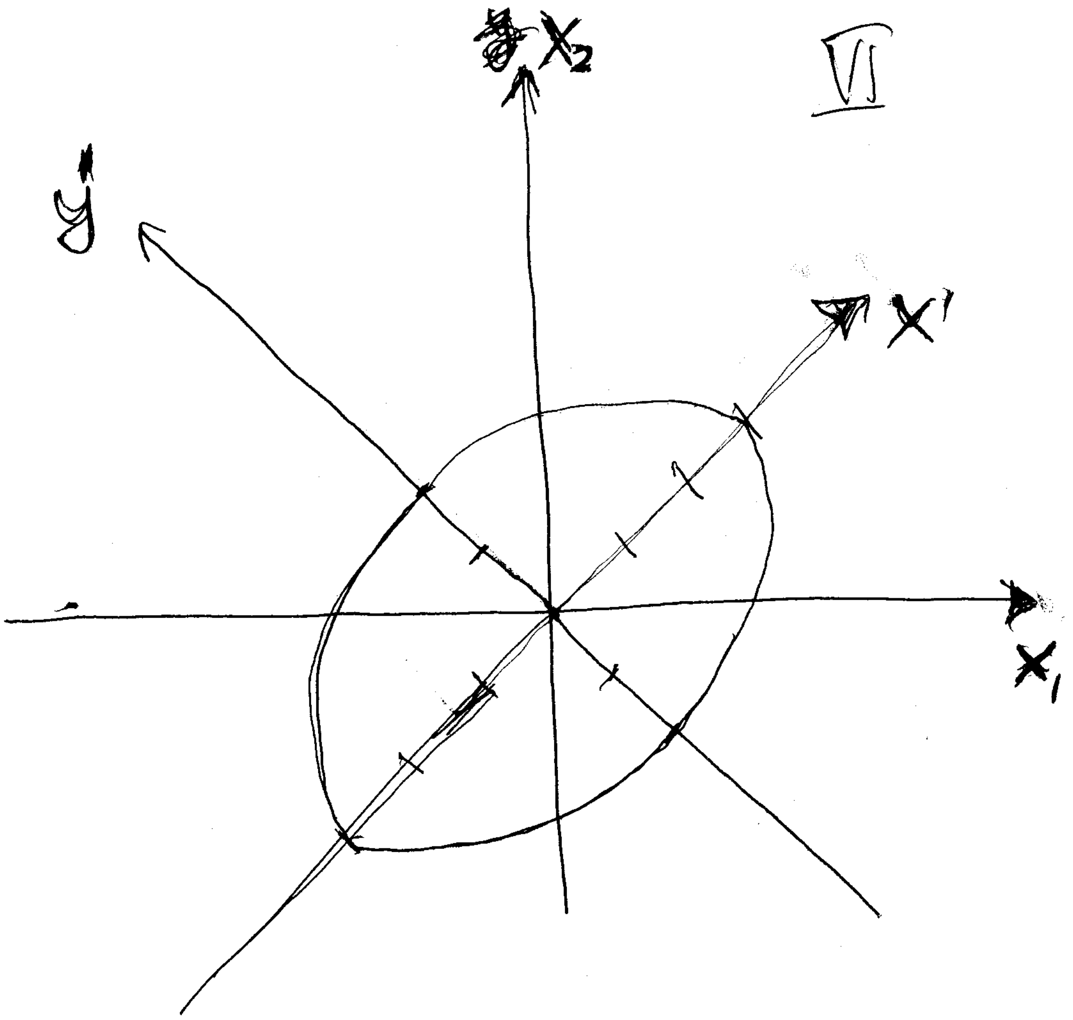
b.) En ortonormal basis av egenvektorer blir

$$\left\{ \underset{\lambda = 8}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}, \underset{\lambda = 18}{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} \right\}$$

Får: $8(x')^2 + 18(y')^2 = 72,$

dvs $4(x')^2 + 9(y')^2 = 36.$ i det nye koordinatsystemet.

VI



$y' = 0$ gir: $(x')^2 = \frac{36}{4} = 9$, så $x' = \pm 3$

$x' = 0$ gir: $(y')^2 = \frac{36}{9} = 4$, så $y' = \pm 2$

Ser at kjeglesnittet er en ellipse etter som egenverdiene begge er positive.

VII

Oppgave 4

a) A er symmetrisk, og derfor ortogonalt diagonaliserbar, og derfor diagonaliserbar.

Kar. pol. A: $\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (3-\lambda)\left[(3-\lambda)^2-1\right] - 1(3-\lambda-1)+1(1-(3-\lambda))$$

$$= (3-\lambda)\left[\lambda^2-6\lambda+8\right]+\lambda-2-2+\lambda =$$

$$3\lambda^2-18\lambda+24-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda+2\lambda-4 =$$

$$\underline{-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20} \quad (=f(\lambda))$$

Setter inn $\lambda = 2$ og får:

$$-2^3+9\cdot 2^2-24\cdot 2+20 = -8+36-48+20 = 0$$

Setter inn $\lambda = 5$ og får:

$$-5^3+9\cdot 5^2-24\cdot 5+20 = -125+225-120+20 = 0$$

Ser altså at $f(2) = f(5) = 0$, så 2 og 5 er egenverdier

4b

$$A\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\-4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$$

så både $\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$ er egenvektorer, og de er fra 2 mavh. Siden de ikke er parallelle, og de spenner derfor et 2-dim. underrom av $E(2)$.

Men $\dim E(2)\leq 2$, siden det finnes egenvektorer fra den andre egenverdien, 5, så hele R^3 er ikke $E(2)$.

Så det 2-dim underrommet av $E(2)$ spent ut av $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$, er hele $E(2)$.

Sett $\vec{u}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\Big/\left\|\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\|=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$, og

$$\vec{u}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-1/\sqrt2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

Da utgjør: $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ en ortogonal basis.

4c.) Finner en egenvektor for 5.

Den må være vinkelrett på begge egenvektorene for $\lambda = 2$, det gir:

$$\left.\begin{array}{l} y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} y = z \\ 2x = y + z = 2z \\ x = z. \end{array}$$

dvs $\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er egenvektorer for 5.

Ortogonal matrise P får vi ved å normere $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ fra b) og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{og } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\cancel{X}$

5a $\det(A^s) = (\det A)^s = \det I_n = 1$

gir: $\det A = \pm 1$ hvis s er positivt partall

Svar: $\det A$ er 1 eller -1 hvis s er et positivt partall.

Hvis s er odde, blir svaret $\det A = 1$.

(Husk $x^s = 1$ har løsning $x = 1$ eller $x = -1$ hvis s like, og bare $x = 1$ hvis s er odde)

b) $T(\sin t) = \cos t = 0 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t$

$T(\cos t) = -\sin t = (-1)\sin t + 0 \cdot \cos t$

Svar: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [T]_B$

$[T^{40}]_B = [T]_B^{40} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4\right)^{10}$

$(I_2)^{10} = I_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$

XI

5c.) $\langle \sin t, \cos t \rangle =$

$$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\langle \cos t, \cos t \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Sett: $\vec{u}_1 = \frac{\cos t}{\|\cos t\|} = \frac{\cos t}{\sqrt{\langle \cos t, \cos t \rangle}} =$

$$\frac{\cos t}{\sqrt{1}} = \cos t., \text{ og}$$

$$\vec{v}_2 = \sin t - \langle \sin t, \cos t \rangle \cdot \cos t$$

$$= \sin t - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos t$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\langle \sin t - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos t, \sin t - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos t \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle \sin t, \sin t \rangle - \sqrt{3}\langle \sin t, \cos t \rangle + \frac{3}{4}\langle \cos t, \cos t \rangle}$$

$$= \sqrt{1 - \sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = 1/2$$

Setter: $\vec{u}_2 = \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \underline{2\sin t - \sqrt{3}\cdot\cos t}$

Svar: $\{\cos t,\ 2\sin t - \sqrt{3}\cos t\}$
utgjør en ortonormal basis.