Nynorsk

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvetskaplege fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 28. september 2005, kl. 09-14

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.
Oppgåvesettet er på 3 sider.

Oppgåve 1

(a) Vi studerer det lineære likningssystemet

$$x_1 + sx_2 + 2x_3 = 3,$$

$$x_1 + sx_2 + x_3 = 2,$$

$$sx_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Avgjer kva for reelle tal s som er slik at dette systemet har (i) nøyaktig ei løysing (ii) uendeleg mange løysingar (iii) inga løysing.

(b) Løys likningssystemet frå (a) for $s = 0$.

Oppgåve 2

(a) Finn dimensjonen til kolonnerommet, rekkerommet, og nullrommet til matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

og finn ein basis for kolonnerommet.

(b) Kva for påstandar er sanne mellom dei fire følgjande?

(i) Kvart endeleg-dimensjonalt vektorrom har ein eintydig bestemt basis.

(ii) Alle basisar for $\mathbf{R}^3$ har tre element.

(iii) Dersom T er ei lineær avbilding frå eit endeleg-dimensjonalt vektorrom V til eit vektorrom W, så har biletrommet(the range) til T same dimensjon som V.

(iv) Dersom M er ei undermengd av $\mathbf{R}^2$, slik at $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ tilhøyrer M dersom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ tilhøyrer M, då er M eit undervektorrom av $\mathbf{R}^2$.

For dei påstandane du meiner er gale: Finn eit moteksempel.

Oppgåve 3

(a) Finn eigenverdiane til matrisa $A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$, og finn dei tilhøyrande eigenvektorane.

(b) Vi har gjeve kjeglesnittet C med likning

$$13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 72.$$

Finn ein ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at likninga til C i det nye aksesystemet (med utgangspunkt i denne basisen) er utan kryssledd. Avgjer kva slags kjeglesnitt C er, og teikn en figur der du viser dei opprinnelege koordinataksane, dei nye, og kurva C.

Oppgåve 4

(a) Studer matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

og avgjer utan rekning om A er diagonaliserbar. Finn deretter det karakteristiske polynomet for A, og vis at $\lambda = 2$ og $\lambda = 5$ er eigenverdiar for A.

(b) Vis at $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\}$ utgjer ein basis for eigenrommet til eigenverdien 2 for A, og finn ein ortogonal basis for dette eigenrommet.

(c) Finn ei ortogonal matrise P og ei diagonal matrise D, slik at $A = PDP^T$.

Oppgåve 5

(a) La A vere ei $n \times n$-matrise slik at $A^s = I_n$, der n er eit naturleg tal, og s er eit positivt partall. Kva for verdiar kan determinanten til A ha ? Blir svaret det same om vi i staden går ut frå at s er eit positivt oddetall ?

I resten av oppgåva studerer vi vektorrommet V der elementa er dei reelle funksjonane $\{asint + bsint$, for reelle $a, b\}$. La $B = \{sint, cost\}$ vere ein basis for V

(b) La den lineære avbildinga T frå V til V vere definert som

$$T(f(t)) = f'(t).$$

Finn matrisa $[T]_B$, og $[T^{40}]_B$

(c) La indreproduktet $<,>$ på V vere gjeve slik:

$$< f(t), g(t) >= f(\frac{\pi}{6})g(\frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{3})g(\frac{\pi}{3})$$

Finn indreprodukta $< sint, cost >$ og $< cost, cost >$, og bruk svara til å finne ein ortonormal basis for V med omsyn til indreproduktet $<,>$.

Trygve Johnsen