Løsninger til undervegsvurdering i MAT 121, fredag 4. mars 2005

Oppgave 1

(a) $\det A = 4.2 - 5.1 = 3$, og $\det B = 3.12 - (-4).(-9) = 0$, og

$$\det C = 3\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 0.\det\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3.(-15) - 0 + 2.17 = -11.$$

Av determinantverdiene ser vi at A og C er invertible, mens B ikke er det.

(b) Vi rekkereduserer $[M|I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, og får suksessivt:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = [I|M^{-1}].$$

Dermed: $M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

Eller, Metode med kofaktorer: $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2

(a) Vi rekkereduserer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

og deretter

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

så svaret er: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$.

(b)

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix} = (15 - 0) + 2(-5 - 0) + 3(5 - 6) = 2,$$

og $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 17 & 5 \end{bmatrix} = 1(-20-0) - 9(-5-0) + 3(-17+8) = -2,$
så $x_2 = \frac{-2}{2} = -1$.

Oppgave 3

(a) Et lineært ligningssystem har alltid en løsning, ingen løsninger, eller uendelig mange løsninger, så det har ALDRI nøyaktig to løsninger. Systemet har nøyaktig en løsning hvis og bare hvis koeffisientmatrisa har determinant ulik null, dvs. hvis $\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & -t \end{bmatrix} = -3t - 36$ er ulik 0. Altså får vi nøyaktig en løsning hvis og bare hvis t er ulik -12. For $t = -12$ rekkereduserer vi systemet og f*aa*r $[0 \quad 0 \quad 14]$ i nederste rekke. Dermed får vi ingen løsninger for $t = -12$.

(b) Ta for eksempel $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \end{bmatrix}$. Da er $\mathbf{b}$ lik 4 ganger kolonne 1 fra A og 3 ganger kolonne 2 fra A. Dermed er $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ og $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ to forskjellige løsninger. Siden et lineært ligningssystem alltid har en løsning, ingen løsninger, eller uendelig mange løsninger, så har det uendelig mange løsninge hvis det har minst to løsninger. Dermed får vi uendelig mange løsninger for $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \end{bmatrix}$, som er ulik nullvektoren.

Oppgave 4

(a) Vi ser at $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = 0$ og $\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -21 \neq 0$, så M_2 er lineært uavhengig, mens M_1 ikke er det.

Videre: M_3 er ikke lineært uavhengig, siden den er en mengde av 3 vektorer i $\mathbf{R}^2$. Generelt er en mengde av M vektorer i $\mathbf{R}^N$ lineært avhengig hvis $M > N$.

(b) **(i)** Ja.
(ii) Nei. Origo er ikke med, så ikke noe null-element.
(iii) Ja.

Oppgave 5

(a) Se på matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Her ser vi umiddelbart at de to første kolonnene danner en basis for kolonnerommet, som da har dimensjon 2, så rangen til A blir 2.

(b) Siden billedrommet til T er kolonnerommet til A, og en basis for $Col(A)$ inneholder to vektorer, har vi $\dim Col(A) = 2$. Dermed $\dim Nul(A) = 5 - \dim Col(A) = 5 - 2 = 3$, som er svaret.