Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Undervegsvurdering i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Fredag 4. mars 2005, kl. 09-12.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator uten alfanumerisk display.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

(a) Finn determinanten til hver av de tre matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & 12 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

og bruk svarene til å avgjøre hvilke matriser blant de tre som er invertible.

(b) Bruk enten rekkeredusering eller formel med kofaktorer til å finne inversmatrisa til

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

I det følgende vil vi studere det lineære ligningssystemet

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9,$$
$$-x_1 + 3x_2 = -4,$$
$$2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 17.$$

(a) Rekkereduser matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

til ei matrise på redusert trappeform, og bruk svaret til å løse ligningssystemet.

(b) Bruk Cramers regel til å finne x_2 i ligningssystemet.

Oppgave 3

(a) Studer ligningssystemet

$$3x_1 + 4x_2 = -3,$$
$$9x_1 - tx_2 = 5.$$

der t er et reelt tall. Hvilke verdier av t er slik at ligningssystemet har

(i) Ingen løsninger.
(ii) Nøyaktig en løsning.
(iii) Nøyaktig to løsninger.

(b) Finn en kolonnevektor $\mathbf{b}$ ulik nullvektoren slik at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger når

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Begrunn svaret.

Oppgave 4

(a) Avgjør hvilke av de følgende mengdene som er lineært uavhengige

$$M_1 = \{\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\}, M_2 = \{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\}, M_3 = \{\begin{bmatrix} 6 \\ 100 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 56 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}\}.$$

(b) Avgjør hvilke av de følgende delmengdene av $\mathbf{R}^3$ som er underrom av $\mathbf{R}^3$.

(i) Mengden av de $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$ slik at $x + z = 0$.

(ii) Planet med ligning $x_1 + x_2 - x_3 = 5$.

(iii) Planet gitt som $\{k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, der $k, l \in \mathbf{R}\}$.

Begrunn kort svarene for de eventuelle tilfellene der du ikke har et underrom.

Oppgave 5

(a) Skriv opp ei (3×4)-matrise (3 rader og 4 kolonner) med rang 2. Begrunn at matrisa har rang 2.

(b) Vi ser på den lineære avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er ei (4×5)-matrise. Vi får vite at det finnes en basis for billedrommet (range) til T, slik at denne basisen inneholder nøyaktig 2 vektorer. Hva er dimensjonen til nullrommet til A ? Begrunn svaret kort.

Hans Brodersen og Trygve Johnsen