Nynorsk

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultetet.

Slutteksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra

Fredag 3. juni 2005, kl. 09-13.

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator utan grafisk display.
Oppgåvesettet er på 2 sider.

Oppgåve 1

(a) Finn determinanten til matrisa

$$M_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

uttrykt ved t, og bruk dette til å avgjere kva for reelle tal t som er slik at matrisa M_t er invertibel. Finn inversen til matrisa M_1.

(b) La $B = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, der $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, og la

$C = \{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\}$, der $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La $\mathbf{v}= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Finn $[\mathbf{v}]_C$.

Finn ei matrise P, slik at $[\mathbf{x}]_C = P[\mathbf{x}]_B$ for alle vektorar $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3$.

Oppgåve 2

(a) Kjeglesnittet C har likninga

$$x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 = 36.$$

Finn ein ortonormal basis for $\mathbf{R}^2$ slik at likninga til C i dette nye koordinatsystemet (med utgangspunkt i denne basisen) er utan kryssledd. Skriv ned likninga til C i dette nye koordinatsystemet.

(b) Avgjer kva slags kjeglesnitt C er, og teikn ein figur der du viser dei opprinnelege koordinataksane, dei nye, og kurva C.

Oppgåve 3

(a) Bruk Gram-Schmidt-prosessen til å finne ein ortogonal basis for underrommet W av $\mathbf{R}^4$ utspent av vektorane

$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$, der $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finn deretter ein ortonormal basis for W.

(b) Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ned på underrommet V spent ut av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, og finn avstanden frå $\mathbf{u}$ til V.

Oppgåve 4

(a) Avgjer utan rekning om matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

er ortogonalt diagonaliserbar. Finn det karakteristiske polynomet til A.

(b) Finn ein basis for eigenrommet E(0) for matrisa A, og finn dimensjonen til søylerommet (kolonnerommet) til A. Vis at elementa i dette søylerommet er eigenvektorar for A.

Oppgåve 5

Vi studerer vektorrommet $P_2 = \{$ polynom $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, for reelle tal $a_0, a_1, a_2\}$, og vi lar $S = \{1, t, t^2\}$ vere standardbasisen for P_2.

(a) For kvart polynom $p(t)$ i P_2 lar vi $P_p(t)$ vere den antideriverte til $p(t)$ (med omsyn til variabelen t) med konstantledd 0, og vi lar $Q_p(t) = \frac{P_p(t)}{t}$. La no T vere den lineære avbildinga definert på P_2 ved

$$T(p(t)) = Q_p(t).$$

Finn matrisene $[T]_S$, og $[T^{10}]_S$.

(b) Når n veks mot uendeleg, nærmar punktet $[T^n(2 + t + 3t^2)]_S$ seg eit punkt i $\mathbf{R}^3$. Kva for punkt er dette ?

Hans Brodersen | Arne Stray | Trygve Johnsen