Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 27. september 2006, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Fasit: Den reduserte trappeformen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en basis for nullrommet $\operatorname{Nul} A$, og angi dimensjonen til dette.

Fasit: Basis for $\operatorname{Nul} A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, dermed er $\dim \operatorname{Nul} A = 1$.

c) Finn den generelle løsning til likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Fasit: Den generelle løsning er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

a) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Fasit: La $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$. Ved beregning ses at $\det B = 1$. Dermed er $\det B \neq 0$ og $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

b) Finn en matrise Q slik at $Q\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^3$.

Fasit: Matrisen Q er bestem ved

$$Q = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) La $T\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være en linear transformasjon slik at

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn standard matrisen til T.

Fasit: Standard matrisen for T gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

a) Kjeglesnittet K har likningen

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 3.$$

Finn en ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K's likning i det tilsvarende nye koordinatsystemet blir uten kryssledd ("cross-product term"). Skriv likningen for K i det nye koordinatsystemet.

Fasit: Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hørende til egenverdien 3 og egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ hørende til egenverdien -1. Likningen for K i basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er gitt ved $3y_1^2 - y_2^2 = 3$.

b) Avgjør hva slags kjeglesnitt K er og tegn en figur der viser de opprinnelige koordinataksene, de nye og K.

Fasit: Da egenverdiene har ulik fortegn er K en hyperbel. Fra likningen

$$\frac{y_1^2}{1^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

ser vi at K skærer y_1 aksen for $y_1 = \pm 1$, og at assymptotene er gitt ved likningene $y_2 = \sqrt{3}y_1$ og $y_2 = -\sqrt{3}y_1$.

Oppgave 4

a) Finn det karakteristiske polynomet til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og vis at -2 og 2 er egenverdier til A.

Fasit: Det karakteristiske polynomet er

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8.$$

Ved beregning ses at 2 og -2 er røtter.

b) Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 2, og finn en vektor $\mathbf{v}_2$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er en ortonomal basis for egenrommet til egenverdien 2.

Fasit: Da $A\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2$ er $\mathbf{v}_1$ en egenvektor med egenverdi 2. La

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn en ortogonal matrise P slik at $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Fasit: La $\mathbf{w}$ være egenvektoren til egenverdien -2 gitt ved

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og la $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}_2]$.

Oppgave 5

a) La A være en 2×2-matrise med egenverdiene 1 og 2.

(i) Finn egenverdiene for matrisen $A^2 - A + I$. Svaret skal begrunnes.

Fasit: Egenverdiene er $1^2 - 1 + 1 = 1$ og $2^2 - 2 + 1 = 3$.

(ii) Avgjør for hvilke reelle tall c matrisen $A^2 - A + cI$ er invertibel.

Fasit: Egenverdiene er $1^2 - 1 + c = c$ og $2^2 - 2 + c = 2 + c$. Matrisen er invertibel nettopp når 0 ikke er en egenverdi, dvs. for $c \neq 0$ og $c \neq -2$.

b) Hvilke av følgende påstander er sanne? Svaret skal **ikke** begrunnes.

(i) Mengden av vektorer $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = -y \right\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$.

Fasit: Sant

(ii) Hvis A er en $m \times n$ matrise med $m < n$, da er $\dim \operatorname{Nul} A > 0$.

Fasit: Sant

(iii) Hvis A er en $m \times n$ matrise med $m > n$, da er $\dim \operatorname{Nul} A = 0$.

Fasit: Falsk

(iv) Det finnes en 2×4 matrise A slik at $\dim \operatorname{Nul} A = 1$.

Fasit: Falsk

(v) Hvis A og B er $n \times n$ matriser og AB er invertibel, da er A og B invertible.

Fasit: Sant

(vi) Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrise, da er $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.

Fasit: Falsk

(vii) Hvis A og B er ortogonale matriser, da er $A + B$ ortogonal.

Fasit: Falsk

(viii) Hvis A og B er symmetriske matriser, da er $A + B$ symmetrisk.

Fasit: Sant

Christian Schlichtkrull