Nynorsk

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet.
Eksamen i emnet MAT 121 - Lineær algebra
Onsdag 27. september 2006, kl. 09-14.

Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.
Oppgåvesettet er på 2 sider.

Oppgåve 1

a) Finn den reduserte trappeforma til matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

b) Finn ein basis for nullrommet $\mathrm{Nul}\, A$, og gi dimensjonen til dette.

c) Finn den generelle løysinga til likninga $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

Oppgåve 2

a) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B}$ er ein basis for $\mathbb{R}^3$.

b) Finn ei matrise Q slik at $Q\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^3$.

c) La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vere ein linear transformasjon slik at

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn standard matrisa til T.

Oppgåve 3

a) Kjeglesnittet K har likninga

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 3.$$

Finn ein ortonomal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at K si likning i det tilsvarande nye koordinatsystemet blir utan kryssledd ("cross-product term"). Skriv likninga for K i det nye koordinatsystemet.

b) Avgjer kva slags kjeglesnitt K er og teikn ein figur som viser dei opprinnelege koordinataksane, dei nye, og K.

Oppgåve 4

a) Finn det karakteristiske polynomet til matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og vis at -2 og 2 er eigenverdier for A.

b) Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er ein eigenvektor med eigenverdi 2, og finn ein vektor $\mathbf{v}_2$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er ein ortonomal basis for eigenrommet til eigenverdien 2.

c) Finn ei ortogonal matrise P slik at $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Oppgåve 5

a) La A vere ei 2×2-matrise med eigenverdiane 1 og 2.

(i) Finn eigenverdiane for matrisa $A^2 - A + I$. Svaret skal grunngjevast.

(ii) Avgjer for kva reelle tal c matrisa $A^2 - A + cI$ er invertibel.

b) For kvar av påstandane (i)–(viii), avgjer om påstanden er sann. Svaret skal **ikkje** grunngjevast.

(i) Mengden av vektorer $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = -y \right\}$ er eit underrom av $\mathbb{R}^2$.

(ii) Dersom A er ei $m \times n$ matrise med $m < n$, då er $\dim \operatorname{Nul} A > 0$.

(iii) Dersom A er ei $m \times n$ matrise med $m > n$, då er $\dim \operatorname{Nul} A = 0$.

(iv) Det finst ei 2×4 matrise A slik at $\dim \operatorname{Nul} A = 1$.

(v) Dersom A og B er $n \times n$ matriser og AB er invertibel, då er A og B invertible.

(vi) Dersom A er ei invertibel $n \times n$ matrise, då er $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.

(vii) Dersom A og B er ortogonale matriser, då er $A + B$ ortogonal.

(viii) Dersom A og B er symmetriske matriser, då er $A + B$ symmetrisk.

Christian Schlichtkrull